

ASOCIACION DE CABILDOS NASA ÇXHÄCXHA

RESOLUCIÓN 002 DE ENERO DE 1996

NIT: 817000260-2

CONSEJO DE EDUCACIÓN

LÍNEAS DE FORMACIÓN DOCENTE

Fortaleciendo la Educación Propia



Matemáticas Primaria Txançxah isawejxa

Elaborado por : Uriel González Montoya // Santiago Gutiérrez // Lida Omaira Chilo



EN EL MARCO DEL CONTRATO
804-2018 FIRMADO CON
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN Y CULTURA
DEL DEPARTAMENTO DEL CAUCA

Módulo 1
Marzo - 2018



LÍNEAS DE FORMACIÓN DOCENTE

Matemáticas Primaria Txançah isawejxa

Todos los derechos reservados

Se puede reproducir siempre que se cite la fuente





ASOCIACIÓN DE CABILDOS NASA ÇXHÂÇXHA - CONSEJO DE EDUCACIÓN
EQUIPO DE APOYO PEDAGÓGICO

LÍNEA DE FORMACIÓN

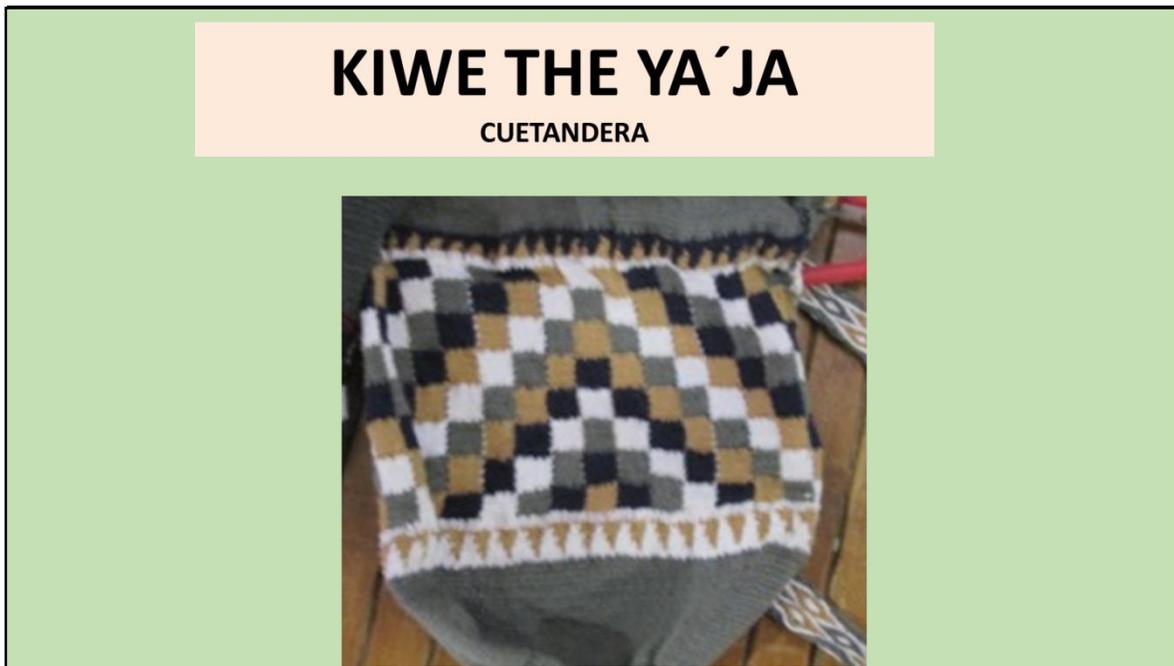
Didáctica de la Matemática - Primaria

Txañçah isawejxa

MÓDULO 1

Resguardo de:
Cohetando

21, 22 y 23 de Marzo de 2018



Responsables de la línea de formación:

Uriel González Montoya
Lida Omaira Chilo Pardo
Santiago Gutiérrez Sánchez



“Mirad su sombra divina dentro de las aguas, que se mueve y no se suspende el correr de ellas; mirad la estrella que asoma en el Oriente con el nombre de El Sol; mirad ese concierto de los principales astros que forman el bosque; mirad el reglamento interno del bosque, el reloj, fijos sobre nuestra corona; mirad el canto armonioso y dulce que tienen esos coros que viven en él”

(Manuel Quintín Lame).



Fotografía N ° 1: “Laguna Sat Tama. Asociación Nasa Cxhacxha.



CONTENIDO

Introducción

1. Objetivos de la línea de formación.
2. Justificación
3. Líneas de formación
4. Procesos metodológicos
 - 4.1 Primer momento
 - 4.2 . Reflexión espiritual
 - 4.3 Himno a la educación propia de Benjamín Dindicue”.
 - 4.4 Contextualización del Movimiento Indígena y la Educación Propia
 - 4.5 Intercambio de experiencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza:
- 5. Segundo momento**
 - 5.1 Himno Hijo del Cauca.
 - 5.2 Lectura de tres textos, el primero de Beatriz, la polución -Mario Benedetti; la segunda es de Claudi Alsina "La matemática hermosa se enseña con el corazón"; y la tercera es un texto de William Ospina titulado “En tiempos de peligro”.
 - 5.3 Enseñanza e historia de la matemática.
 - 5.4 Revisión de conceptos e interpretación de los fraccionarios.
 - 5.5 Pensamientos matemáticos espacial, sistemas geométricos, métrico y sistemas de medidas en teoría y práctica.
 - 5.6 taller teórico practico del el sistema de medidas partiendo del cuerpo humano.
 - 5.7 Taller teórico practico de “Pentominó” donde se realizara un juego para explorar la geometría plana, área, perímetro, traslación, rotación y reflexión.
 - 5.8 Taller teórico practico del sistema de numeración posicional.
 - 5.9 Taller teórico practico de los números naturales mediante un juego llamado “Dix círculo numérico”.



Tercer Momento DIA 3

6 - Reflexión espiritual

6.1 Se realizara un taller teórico práctico de las operaciones matemáticas y la escritura de números en la yupana.

6.2 Rescatar los juegos tradicionales con fines pedagógicos y educativos para fortalecer los valores y tradiciones culturales.

6.3 Exposición: Matemáticas Nasa (Pensamiento Geométrico o Espacial).

7. Socialización del trabajo realizado.

8. Evaluación y clausura del encuentro.

9. Bibliografía.

10. Fotografías - imágenes



SEMINARIO TALLER DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS COHETANDO- PAEZ, CAUCA 2018

**“Toda ley que atenta contra la naturaleza
no estamos obligados a obedecerla”.**
(Manuel Quintín Lame).

Introducción

La matemática en el pueblo Nasa, ha sido históricamente una herramienta fundamental para la trasmisión de los valores culturales y los saberes ancestrales a través de la cotidianidad y ha sido transmitida de generación en generación; para la pervivencia como pueblo indígena con toda su diversidad cultural. Si bien, la educación escolarizada fue impuesta a los pueblos indígenas hace más de un siglo, consideramos que es necesario conocer la historia de la matemática externa, como también la propia, para desarrollar metodologías apropiadas y contextualizadas al entorno en donde vivimos y enseñamos. Sembramos el gusto, la emoción y el propósito de los pensamientos matemáticos a niños, niñas y adolescentes vitalizando su identidad y arraigo cultural, fomentando el respeto a la diversidad de formas de ser y pensar. Para ello, el Consejo de Educación de la Asociación de Cabildos Nasa Çxhâçxha abre espacios de formación y autoformación a los(as) dinamizadores(as) de las diferentes instituciones educativas que tienen a cargo la enseñanza/aprendizaje de los pensamientos matemáticos y áreas relacionadas. El presente documento es un módulo de apoyo del primer ciclo de formación de la línea Didáctica de la Matemática (Grupo 1. Primaria), el cual contiene objetivos, justificación, actividad y lecturas o ejercicio a desarrollar durante los espacios de formación los días 22, 23 y 24 marzo de 2018.



Objetivo

- Profundizar con maestros y maestras los pensamientos y procesos matemáticos a través de herramientas teórico-prácticas que puedan replicar en su acción educativa.

Objetivos Específicos

- Generar espacios de intercambio de experiencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por parte de maestros y maestras participantes.
- Profundizar con maestros y maestras características de los pensamientos y procesos matemáticos desde ejercicios teórico-prácticos.
- Trabajar herramientas lúdicas y alternativas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde la teoría y las prácticas.

Justificación

Dentro de los espacios de formación docente que adelantó el Consejo de Educación, en el 2017, se encuentra la línea de “Didáctica de la Matemática” (Isaweixatewe’sx pü’çxheçvxitn) con el objetivo de profundizar opciones teórico-prácticas de la didáctica de las Matemáticas que permitieran a maestros y maestras conocer nuevos avances en cuanto a la enseñanza de las matemáticas y repensar la práctica educativa. Allí se abordaron las nociones sobre la matemática, enfoques generales y las formas de enseñanza (normativa, iniciativa, aproximativa). Para el caso de primaria se planteó un taller de números racionales (fracciones, decimales y porcentajes), mientras que en secundaria se ahondó sobre el álgebra. En el segundo Módulo de la línea de formación, los docentes identificaron problemas sociales o ambientales en donde definieron contenidos para explicar el problema y planearon algunas clases para su desarrollo. Al final se expuso algunos recursos y enfoques de la didáctica de las matemáticas, como el recurso de la historia de las matemáticas de las principales operaciones (suma, resta, multiplicación y división).

Desde el equipo pedagógico, consideramos pertinente continuar el enfoque propuesto para la línea de formación a maestros y maestras que tienen a su cargo áreas, materias o núcleos relacionados con la matemática. Dicha línea permite abordar los principales problemas y dificultades que se encuentran en el ámbito educativo formal; como también, generar espacios de investigación y sistematización de experiencias de acuerdo con el contexto sociocultural. Por tanto,



para el 2018, la línea de formación retoma y profundiza elementos de la didáctica de las matemáticas.

Una de las actividades pendientes dentro de la línea de formación fue abordar los contenidos y discusiones sobre la didáctica de la matemática en contextos específicos de los estudiantes, retomando sus conocimientos previos y el manejo de nociones/operaciones. Ya que el fin de la educación no es que los estudiantes aprendan matemáticas para responder a las pruebas, sino es el de desarrollar capacidades y empoderar a los estudiantes para que intervengan matemáticamente su realidad y la transformen (Radford, 2006). Siguiendo esta idea, los ciclos de formación plantean profundizar sobre algunos enfoques de la educación matemática como son: etnomatemática; la teoría cultural de objetivación; y, la organización del currículo de acuerdo con el contexto cognitivo, social, cultural de los estudiantes.

Fruto de dichos encuentros y espacios de formación, algunos docentes manifestaron profundizar sobre las temáticas o pensamientos planteados en el primer y segundo Módulo. Asimismo, es necesario avanzar en la sistematización de los principales problemas que tienen maestros y maestras en la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje de niños, niña y adolescentes. Para esto, se plantea organizar dos grupos de trabajo: un grupo de docentes de primaria y, otro conformado por docentes de secundaria.



Línea de Formación

Un saludo de armonía y equilibrio a todos los dinamizadores y dinamizadoras docentes participantes de la línea de formación Didáctica de la Matemática. Con el objetivo de abordar de manera más contextualizada la acción educativa, desde el Consejo de Educación hemos querido conformar dos grupos de formación y trabajo de acuerdo con el contexto y la población educativa (primaria y secundaria). Por tanto, se define conformar un grupo con docentes o dinamizadores encargados de la enseñanza y el aprendizaje de los pensamientos matemáticos en primaria. El presente módulo de apoyo está dirigido para este grupo de docentes o dinamizadores que participan de la línea de formación que se desarrolla en dos encuentros o ciclos distribuidos de la siguiente manera:

- ◆ Didácticas de la Matemática: Los Pensamientos Matemáticos en Primaria (Primer encuentro).
- ◆ Didáctica de las Matemáticas: Introducción a la Etnomatemática y Matemática Lúdica (Segundo encuentro).

En el primer encuentro de la línea de formación Didácticas de la Matemática se trabajan elementos teórico-prácticos de los pensamientos matemáticos, brindando herramientas didácticas para abordarlos en el escenario educativo. En el segundo ciclo de formación se concentra sobre la didáctica de las matemáticas e introducen dos enfoques: etnomatemática y matemática lúdica.

Agradecemos su participación disposición y esperamos que este espacio de capacitación nos permita construir colectivamente, estrategias, herramientas y didácticas para seguir fortaleciendo el diario caminar asía una educación que sirva para la pervivencia cultural en el territorio Nasa de Nxadx Kiwe (Tierradentro).



Procesos Metodológicos Módulo de Primaria

Día (1)

La apertura de la jornada es con una reflexión espiritual: La realizara los apoyos pedagógicos del programa de educación de la Asociación de Cabildos Nasa Çxhâçxa con un video del águila, con el fin de motivar a los participantes a enseñar a soñar en grande y volar a lo alto.



Fotografía N ° 2: “Laguna Sat Tama. Asociación Nasa Cxhacxa

Actividad N°2. Himno a la educación propia de Benjamín Dindicue. Cada participante tendrá la oportunidad de entonarlo y no habrá audios o sonidos, solo copias del himno, esto con el fin de que los docentes que son nuevos se aprendan los himnos de la organización y los enseñen a los estudiantes.



Fotografía.N°3 Nevado del Huila, pintura Benjamín Dindicue



Actividad N°3. Se hará la contextualización del Movimiento Indígena y la Educación Propia, la exposición se hará en diapositivas, para que los docentes conozcan los avances y desafíos del movimiento indígena



Fotografía N° 4 de movilizaciones en el Departamento del Cauca Archivos Asociación Nasa Cxhacxha



Actividad N° 4. Se realizará un intercambio de experiencias con los docentes para que ellos compartan los principales problemas o situaciones conflictivas en el aula sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática como también experiencias positivas frente al tema para ello nos apoyaremos en una lectura sobre la concepción de la matemática y su enseñanza, con el fin de familiarizar al dinamizadores educativo (a) con los módulos, Didácticas de la Matemática en este primer encuentro

Concepciones de las Matemáticas¹

Cualquier estrategia por utilizar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas estará sustentada en alguna percepción sobre la naturaleza de las matemáticas. Esta percepción influirá en el tipo de actividades y ambiente de aprendizaje que el profesor proponga a sus estudiantes para inducir en ellos el aprendizaje de los conceptos matemáticos. De esta manera, según la visión particular acerca de las matemáticas, se puede propiciar en los estudiantes diferentes tipos de aprendizaje que pueden ser memorísticos y algorítmicos o, por el contrario, aprendizaje que requieran del alumno un pensamiento creativo para enunciar conjeturas, aplicar de manera razonada la información, descubrir y, en general, construir su conocimiento. Adicionalmente, a través de las lecciones, el profesor transmite su visión particular a los estudiantes y, de este modo, promoverá en ellos una forma particular de abordar el estudio de las matemáticas. Dada la influencia que tiene la percepción particular acerca de las matemáticas en el aprendizaje de esta disciplina, se hace realmente importante determinar algunas de las creencias acerca de las matemáticas en el sistema educativo costarricense.

Marco de Referencia

Una de las principales preocupaciones en las investigaciones recientes sobre educación matemática, particularmente con lo que tiene que ver con creencias y concepciones es, precisamente, la definición de estos términos. Diversos autores señalan que se debe distinguir entre los conceptos “creencias” y “concepciones”. Algunos como Thompson (1992), señalan que las diferencias entre ambos conceptos son mínimas y no vale la pena tenerlas en cuenta; otros, Mora F., Barrantes H. 73 por el contrario, consideran importante delimitar bien el ámbito de ambos conceptos

¹ EL siguiente texto se transcribe del documento: Barrantes, H. (2008a). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. En Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, número 4.



(Ponte, 1992). Para Thompson (1992), las creencias forman parte de las concepciones, mientras que Ponte (1992) dice que las creencias tienen una naturaleza proposicional y que las concepciones son constructos cognitivos que pueden verse como el marco subyacente que organiza los conceptos en el individuo. Según el segundo autor, la diferencia fundamental radica en que las creencias ponen de manifiesto aspectos que se consideran verdades en algún ámbito, mientras que las concepciones son las nociones principales que describen ese ámbito. Esto significa que las concepciones son un constructo más general. El término “concepciones” se puede identificar con la percepción o visión acerca de la naturaleza de una disciplina. En cuanto a lo educativo, las creencias acerca de la disciplina se mueven dentro del marco de una concepción o visión particular y, de acuerdo con Furinghetti y Pehkonen (2002), les conciernen también a otros aspectos tales como: las normas del salón de clase, la personalidad del individuo y otros.

Entendemos por Creencias aquí, siguiendo a García, Azcárate y Moreno (2006), como ideas poco elaboradas, generales o específicas, que forman parte del conocimiento que posee la persona (docente, estudiante) e influyen de manera directa en su desempeño. Las creencias inciden, de manera decisiva, en todo lo que supone el proceso de enseñanza aprendizaje. Por otra parte, debe considerarse que las personas no siempre están conscientes de sus creencias; además, éstas pueden cambiar con el tiempo, debido a diversas causas. También se acepta, de acuerdo con Goldin (2002), que las creencias, además del componente cognitivo, pueden tener un componente de tipo afectivo. Goldin (2002) señala, además, la necesidad de distinguir las estructuras de creencias individuales de los sistemas de creencias social o culturalmente compartidas. Por estructuras de creencias entiende un conjunto de creencias en el individuo que se refuerzan y apoyan mutuamente, que son primordialmente de tipo cognitivo pero que, a menudo, incorporan lo afectivo. Un sistema de creencias es una estructura de creencias extensiva que es compartida social o culturalmente.

Según lo expuesto anteriormente, las concepciones acerca de la disciplina influyen en las creencias de los diferentes aspectos que tienen que ver con ella. En cuanto a la naturaleza de las matemáticas, es importante señalar las tres visiones principales que señala Ernest: instrumentalista, platónica y resolución de problemas (ver Barrantes, 2008a). Estas concepciones acerca de las matemáticas inducen estructuras y sistema de creencias que inciden en el proceso de enseñanza aprendizaje de esta disciplina. Godino, Batanero y Font (2003) identifican dos concepciones extremas en



cuanto a la enseñanza de las matemáticas: la idealista-platónica y la constructivista. Según la primera, debe enseñarse a los alumnos, en primer lugar, las estructuras de la matemática de manera axiomática; esto los pondría en situación de poder resolver los problemas y aplicaciones que luego se les presenten. En esta situación, el profesor expone los axiomas, definiciones y teoremas sin conectar con situaciones de aplicación o de resolución de problemas. Podemos relacionar esta concepción con la visión platónica de las matemáticas.

Según la visión constructivista, las aplicaciones, tanto externas como internas deberían regir el proceso de construcción de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes; esto es, el desarrollo conceptual debe seguir, al menos de manera aproximada, el camino de la creación de las matemáticas. Esta concepción acerca de la enseñanza de las matemáticas está estrechamente relacionada con la visión de las matemáticas como resolución de problemas. En la práctica, se da una tercera visión, que podríamos llamar algorítmica, en el proceso de enseñanza de las matemáticas que está más ligada a la concepción instrumentalista que señala Ernest. Esta promueve una enseñanza de las matemáticas fundamentalmente de tipo memorístico y algorítmico; se proporciona al estudiante definiciones y reglas de procedimiento particulares para ser aplicadas en situaciones dadas. Mora F., Barrantes H. 75 Diversos estudios (por ejemplo, Vilanova et al (2001), Martínez (2003), Ramos y Font (2004), Hernández (s. f.)), realizados tanto en el ámbito de la educación media como de la primera y superior, han mostrado la coexistencia de estas concepciones acerca de la enseñanza de las matemáticas entre los profesores de esta disciplina. Sin embargo, se afirma una preponderancia de la visión algorítmica.

Además de las discusiones y concepciones sobre la educación de las matemáticas, es necesario partir de los pensamientos y prácticas de la matemática en contextos socioculturales específicos. Para el mundo Nasa las matemáticas siempre han estado presentes en los diferentes espacios de la vida, pero se hace necesario conocer de fondo otras enseñanzas o pensamientos externos para la interacción con otras culturas, para ello se hace necesario dar una mirada general de como conciben los grandes investigadores de la ciencia de la matemática.

Recogiendo lo anterior, se plantea a los participantes exponer su concepción de las matemáticas y sus creencias al momento de propiciar su aprendizaje y enseñanza. Por un lado, abriremos espacios para la participación de los asistentes con sus



comentarios, reflexiones o experiencias. Posteriormente, por grupos se realiza una actividad ideográfica para representar las concepciones y creencias en la educación matemáticas².

Bibliografía

Barrantes, H. (2008a). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. En Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, número 4.

Barrantes, H. (2008b). Encuesta: creencias en la educación matemática. En Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, número 4.



Fotografía N° 5. del consejo de Educación Nasa Chacha año 2013



Fotografía N° 6. del consejo de Educación Nasa Chacha año 2012

² Federico Mora Mora Escuela de Matemática, Universidad Nacional. fmora16@hotmail.com Hugo Barrantes Campos Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia. habarran@gmail.com www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes.



DIA (2)

Actividad N° 5: Se entona el himno Hijo del Cauca. (Rosa Helena Toconás)

Yo que soy hijo del Cauca, llevo sangre de Páez
De los que siempre han luchado de la conquista hasta hoy (Bis)

Vivimos porque peleamos
contra el poder invasor y seguiremos peleando
mientras no se apague el sol. (Bis)

Indígenas campesinos,
llevamos sangre Páez, de Álvaro y Benjamín,
de la Gaitana y Quintín (Bis)

Toda la gente lo extraña
por su valiente labor, por denunciar la injusticia,
lo asesinó el opresor,
Su semilla nunca Muere, mil Ávaros nacerán
Y el camino de la lucha, alumbrando seguirán (Bis)

Indígenas campesinos, llevamos sangre Páez,
de Álvaro y Benjamín, de la Gaitana y Quintín (Bis)

Mártires de nuestro pueblo,
en la memoria estarán y marcarán el camino
en busca de libertad, Indígenas campesinos,
llevamos sangre Páez, De Álvaro y Benjamín,
de la Gaitana y Quintín.

Actividad N° 6: Se realiza a lectura de tres textos, el primero de Beatriz, la polución Mario Benedetti; la segunda es de Claudi Alsina "La matemática hermosa se enseña con el corazón"; y la tercera es un texto de William Ospina titulado "En tiempos de peligro".



Beatriz, la polución - Mario Benedetti

Dijo el tío Rolando que esta ciudad se está poniendo imban cable de tanta polución que tiene. Yo no dije nada para no quedar como burra pero de toda la frase sólo entendí la palabra ciudad. Después fui al diccionario y busqué la palabra imban cable y no está. El domingo, cuando fui a visitar al abuelo le pregunté qué quería decir imban cable y él se ríó y me explicó con buenos modos que quería decir insoportable. Ahí sí comprendí el significado porque Graciela, o sea mi mami, me dice algunas veces, o más bien casi todos los días, por favor Beatriz por favor a veces te pones verdaderamente insoportable. Precisamente ese mismo domingo a la tarde me lo dijo, aunque esta vez repitió tres veces por favor por favor por favor Beatriz a veces te pones verdaderamente insoportable, y yo muy serena, habrás querido decir que estoy imban cable, y a ella le hizo gracia, aunque no demasiada pero me quitó la penitencia y eso fue muy importante. La otra palabra, polución, es bastante más difícil. Esa sí está en el diccionario. Dice, polución: efusión de semen. Qué será efusión y qué será semen. Busqué efusión y dice: derramamiento de un líquido. También me fijé en semen y dice: semilla, simiente, líquido que sirve para la reproducción. O sea que lo que dijo el tío Rolando quiere decir esto: esta ciudad se está poniendo insoportable de tanto derramamiento de semen. Tampoco entendí, así que la primera vez que me encontré con Rosita mi amiga, le dije mi grave problema y todo lo que decía el diccionario. Y ella: tengo la impresión de que semen es una palabra sensual, pero no sé qué quiere decir. Entonces me prometió que lo consultaría con su prima Sandra, porque es mayor y en su escuela dan clase de educación sensual. El jueves vino a verme muy misteriosa, yo la conozco bien cuando tiene un misterio se le arruga la nariz, y como en la casa estaba Graciela, esperó con muchísima paciencia que se fuera a la cocina a preparar las milanesas, para decirme, ya averigüé, semen es una cosa que tienen los hombres grandes, no los niños, y yo, entonces nosotras todavía no tenemos semen, y ella, no seas bruta, ni ahora ni nunca, semen sólo tienen los hombres cuando son viejos como mi padre o tu papi el que está preso, las niñas no tenemos semen ni siquiera cuando seamos abuelas, y yo, qué raro eh, y ella, Sandra dice que todos los niños y las niñas venimos del semen porque este líquido tiene bichitos que se llaman espermatozoides y Sandra estaba contenta porque en la clase había aprendido que espermatozoide se escribe con zeta. Cuando se fue Rosita yo me quedé pensando y me pareció que el tío Rolando quizá había querido decir que la ciudad estaba insoportable de tantos espermatozoides (con zeta) que tenía. Así que fui otra vez a lo del abuelo, porque él siempre me entiende y me ayuda aunque no exageradamente, y cuando le conté lo



que había dicho tío Rolando y le pregunté si era cierto que la ciudad estaba poniéndose imbanicable porque tenía muchos espermatozoides, al abuelo le vino una risa tan grande que casi se ahoga y tuve que traerle un vaso de agua y se puso bien colorado y a mí me dio miedo de que le diera un patatús y conmigo solita en una situación tan espantosa. Por suerte de a poco se fue calmando y cuando pudo hablar me dijo, entre tos y tos, que lo que tío Rolando había dicho se refería a la contaminación atmosférica. Yo me sentí más bruta todavía, pero enseguida él me explicó que la atmósfera era el aire, y como en esta ciudad hay muchas fábricas y automóviles todo ese humo ensucia el aire o sea la atmósfera y eso es la maldita polución y no el semen que dice el diccionario, y no tendríamos que respirarla, pero como si no respiramos igualito nos morimos, no tenemos más remedio que respirar toda esa porquería. Yo le dije al abuelo que ahora sacaba la cuenta que mi papá tenía entonces una ventajita allá donde está preso porque en ese lugar no hay muchas fábricas y tampoco hay muchos automóviles porque los familiares de los presos políticos son pobres y no tienen automóviles. Y el abuelo dijo que sí, que yo tenía mucha razón, y que siempre había que encontrarles el lado bueno a las cosas. Entonces yo le di un beso muy grande y la barba me pinchó más que otras veces y me fui corriendo a buscar a Rosita y como en su casa estaba la mami de ella que se llama Asunción, igualito que la capital de Paraguay, esperamos las dos con mucha paciencia hasta que por fin se fue a regar las plantas y entonces yo muy misteriosa, vas a decirle de mi parte a tu prima Sandra que ella es mucho más burra que vos y que yo, porque ahora sí lo averigüé todo y nosotras no venimos del semen sino de la atmósfera.

"LA MATEMÁTICA HERMOSA SE ENSEÑA CON EL CORAZÓN"

Claudi Alsina

Esta conferencia trata de la "matemática emotiva" y va dirigida muy especialmente a "corazones pitagóricos", con la esperanza de que sea posible poder juntar, en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, rigor y sentimientos, verdades y emociones, recuperando así para el noble oficio de educar matemáticamente la dimensión pasional que nunca debió perderse.

¿Qué harían sin las matemáticas y sin nosotros?



Pongan un poco de imaginación. Todos nosotros en un arca o en una nave espacial, alejándonos de "ellos" y diciendo "¡Adiós! Hasta siempre, que les vaya bien"... y en el arca o en la nave todos los libros de matemáticas, los elementos de computación, las calculadoras, las reglas, los compases, los números, las gráficas, los teoremas, los conceptos y los métodos.... Todos nosotros juntos en la lejanía pero cuidando de nuestro gran tesoro... las reacciones mundiales serían inmediatas.

Si bien en un primer momento las noticias podrían ser curiosas ("Se fueron todos los profesores de matemáticas", "¡Qué alivio!", "¿Volverán?", "¡Adiós al fracaso escolar!", "Un mundo sin números"...) y las reacciones de algunos chicos y chicas podrían ser preocupantes ("Ya era hora", "¿De verdad?", "¿Seguro que se fueron?",...) pero pronto la parálisis mundial se produciría: billetes sin cifras, sastres sin cintas de medir, termómetros sin escalas, cajeros sin posibilidades de contar, enfermeras sin fármacos medibles, electrocardiogramas sin curva, loterías sin números, coches sin velocímetro,... recuerden que en este escenario no estamos "ni nosotros ni ellas"... seguramente en pocos minutos gran parte de la humanidad quedaría colapsada y pronto empezaríamos a recibir mensajes insistentes pidiendo ayuda ("vuelvan rápido", "si quieren irse ustedes váyanse pero que ellas regresen", "ellas no son solo tuyas",...). A partir de este momento podrían darse dos situaciones posibles: si nosotros decidiéramos no regresar la humanidad empezaría de nuevo a desarrollar matemáticas para su dinero, sus vestidos, sus termómetros, sus cajas, sus fármacos, sus aparatos, sus loterías, sus coches, y de nuevo surgirían otros como nosotros pero con un larguísimo camino por recorrer. La otra situación, mucho más posible que la anterior, sería nuestro inmediato regreso. Seguramente lo aprovecharíamos para negociarlo ("¿vale el doble?", "¿ocho horas semana?"...) pero el recibimiento sería apoteósico ("¡Gracias!", "¡Nunca debieron irse!", "¡Regresen!",...).

La moraleja de este caso es que quizás estaría bien **que supiéramos transmitir a los demás la importancia de nuestra disciplina y de nuestra labor**, haciendo ver lo positivo y lo negativo, para lo que sirven las matemáticas y para lo que no, la diferencia entre el autoaprendizaje y la guía docente... **Inteligencia racional y inteligencia emocional** Siguiendo a Daniel Goleman (Goleman, 1996) podemos decir que hay en todos nosotros dos mentes, una mente que "piensa" y otra mente que "siente". Por una parte la racionalidad, la comprensión de las cosas, la meditación sobre los hechos, la ponderación y reflexión de lo que vemos. Por otra parte, las emociones, efímeras o estables, que son la base de los sentimientos, de los estados afectivos. "Nuestra mente" es en realidad el resultado de la interacción entres



estas dos mentes, o como se ha dicho simbólicamente, "la cabeza y el corazón". Estudiando, enseñando o yendo por la vida ponemos en juego una fina síntesis de lo que la inteligencia racional nos dicta y de lo que la inteligencia emocional nos sugiere. Afrontamos la realidad y le damos respuesta empleando a la vez estas dos formas de inteligencia.

Matemáticas e inteligencia racional

Saber matemáticas se ha convertido, a veces, en una forma de exhibir la inteligencia racional, incluso una forma de medirla. Así muchos coeficientes de inteligencia hacen servir el ligamen matemática-racionalidad de forma directa o indirecta. Absurdas cuestiones matemáticas como "siga la serie 8, 80, 81,..." siguen formando parte de muchos tests, que curso a curso, rellenan nuestros escolares. Siguiendo (Tall, 1991) querríamos hacer una breve referencia aquí al hecho de que *la inteligencia racional presenta de hecho dos formas de pensar*. Sin entrar ni en los aspectos anatómicos ni fisiológicos de los hemisferios izquierdo y derecho del cerebro humano (Glennon, 1980) ni en su especialización concreta o complementariedad (Gazzaniga, 1985) querríamos recordar aquí que por una parte tenemos una forma de pensamiento: *verbal, gestual, lógica, analítica, linealsecuencial,...* con capacidades evidentes para la identificación de conceptos, la expresión, la deducción paso a paso, la argumentación lógica,... Pero, a la vez, tenemos una forma de pensamiento: *visual-espacial, analógica, intuitiva, sintética, de procesamiento múltiple y simultaneo,...* con capacidades para ver, comunicar, relacionar, identificar estructuras, entender metáforas, establecer analogías, etc.

Matemáticas e inteligencia emocional

Las clases de matemáticas han provocado, a menudo, emociones más negativas que positivas, situación a la que sin duda se ha de dar la vuelta. Esta emotividad positiva que el "hacer" matemáticas despierta en muchos de nosotros y en una parte de nuestros estudiantes se debería extender a una mayoría, sin olvidar a la sociedad en general. Podríamos recordar aquí la famosa sentencia de Antoine de Saint-Exupéry "Solo se puede ver correctamente con el corazón; lo esencial permanece invisible para el ojo". y preguntarnos si las matemáticas también pueden jugar bien con el mundo emocional, haciendo desaparecer los aspectos negativos y profundizando en los positivos:



(i) Emociones negativas que se han de combatir En el mundo de las emociones de tipo básico encontramos un conjunto de emociones que podríamos denominar negativas: ira, tristeza, miedo, aversión, vergüenza,... y sus emociones derivadas tales como: indignación, hostilidad, animosidad, pesimismo, melancolía, depresión, ansiedad, preocupación, pánico, desprecio, antipatía, disgusto, remordimiento, culpa,... Es evidente que si el aprendizaje o la enseñanza de las matemáticas provocan alguna emoción negativa (o bien se ha de hacer en presencia de algunas de estas emociones) entonces "la mente emocional" *bloqueará* a la "mente racional", haciendo imposible el progreso docente.

(ii) Emociones positivas que se han de fomentar

En el mundo de las emociones básicas también encontramos un conjunto de emociones que denominaremos positivas: alegría, amor, sorpresa, felicidad, deleitamiento, diversión, satisfacción, euforia, cordialidad, confianza, enamoramiento, admiración,... Estas son las emociones y sensibilidades que sería bueno cultivar en el contexto de la educación matemática. Pero la imagen popular acostumbra, precisamente, a *contraponer* el hacer matemáticas como paradigma de actuación exenta de emotividad.

Matemáticas y sorpresa

La "sorpresa" en clase de matemáticas no ha de tener un sentido de sobresalto o desconcierto pero sí que puede tener el sentido de sorprender, de incrementar la atención o crear un sentimiento participativo de admiración y satisfacción, un "¡ajá!" o un "¡eureka!". Distinguiremos diversos tipos de sorpresas:

• **Sorpresa ante la belleza y las características de un objeto matemático**

Podemos provocar sorpresa tanto con objetos reales que participen de principios matemáticos (mosaicos, calidoscopios, poliedros, diseños minimalistas,...) como con objetos matemáticos abstractos de ingeniosas propiedades (funciones, algoritmos,...).

• **Sorpresa ante la genialidad de una argumentación o razonamiento**

Como en las buenas películas de intriga donde intuitivos detectives nos dejan boquiabiertos con razonamientos que resuelven intrincados casos, en las clases de matemáticas podemos gozar de la sorpresa de ingeniosos razonamientos, los cuales a menudo no acostumbran a ser flor de un día sino auténticos métodos que podemos incorporar a nuestro maletín de estrategias.



- **Sorpresa ante la visualización de un problema**

Entender hechos matemáticos a partir de imágenes puede producir una sorpresa gratificante a la mente y al cuerpo a la vez.

- **Sorpresa ante la aparición de una solución inesperada**

En la vida puedes llegar a lugares o situaciones imprevisibles. En el mundo de las matemáticas también.

- **Sorpresa ante el vínculo imprevisible entre dos técnicas, dos conceptos o dos ramas del conocimiento**

Unir o relacionar cosas que creíamos alejadas o sin ningún vínculo produce siempre una sorpresa positiva. En matemáticas también sucede esto cuando con geometría resolvemos un problema de números o un teorema de un tema y de golpe se convierte en la clave en otro tema alejado.

Matemáticas y alegría

La diversión, alegría o euforia en matemáticas van ligadas, a menudo, a actividades extra-escolares en lo que se denomina la matemática recreativa. En la clase se puede dar una diversión totalmente ajena a la disciplina provocada por una explicación, un chiste, una anécdota o un hecho cómico. Pero lo que aquí nos interesa es el caso en que estudiantes y profesorado se **diviertan haciendo matemáticas**. Haremos un pequeño análisis de formas de diversión.

- **Diversión derivada de la dinámica de clase**

El cómo organizamos la dinámica a clase será determinante de muchas actitudes. Sabemos que lo que divierte es la participación activa, el carácter lúdico de las presentaciones... se ha de aprovechar.

- **Diversión derivada del uso de material**

Tableros, dominós, cartas, cubos, dados,... hay mil materiales lúdicos que pueden readaptarse para enseñar matemáticas. La diversión del juego se traspa entonces automáticamente a la del tema que se trabaja.

- **Diversión asociada al uso tecnológico.**



Sería muy interesante la existencia en el mercado de juegos de ordenador válidos para aprender matemáticas más allá del puro placer de "pasatiempos". Una simple calculadora puede ser muy divertida si se usa apropiadamente.

• **Diversión derivada de la forma de presentación**

Un mismo tema puede ser ambientado o introducido de formas muy diversas, las cuales pueden ser tan divertidas que automáticamente se vuelven motivadoras.

• **Diversión derivada de la situación problemática analizada**

Especialmente en los enunciados de problemas la elección de un buen argumento o situación para presentar el problema puede ser determinante de cara, incluso, a proporcionar el interés necesario para resolver bien la cuestión planteada.

Matemáticas y confianza

La confianza que se ha de adquirir en matemáticas es, por encima de todo, la confianza en uno mismo, en dominar los conceptos, las habilidades, los recursos, las estrategias. Es un problema de auto credibilidad con la propia actuación y una herramienta esencial en el éxito ante la evaluación. Querríamos ahora remarcar algunos instrumentos docentes para promover la confianza:

• **Confianza derivada de la repetición**

El desconocimiento o los primeros ensayos pueden generar inseguridad. Las repeticiones exitosas aportan confianza. Todo esto vale tanto para aparcar un coche como para resolver una ecuación. Por ello la resolución de problemas se vuelve enseñable.

• **Confianza derivada de la comprobación**

Al verificar si se ha obtenido lo que se deseaba o si lo que ha salido es creíble o adecuado uno experimenta una sensación de confianza en lo que se ha hecho. Es paradigmática la situación típica en el final de la resolución de un problema cuando se ha de verificar si todo lo que se ha obtenido es bueno o está bien.

• **Confianza derivada de la evaluación global**

Cuando los estudiantes saben que no se juegan su evaluación en un solo examen sino que en esta intervienen muchos factores (trabajos hechos, intervenciones, resúmenes, proyectos, pruebas,...) experimentan una mayor confianza en superar la asignatura. Es el efecto de la evaluación continuada que por definición ha de ser compensatoria.



• **Confianza derivada de la no-evaluación**

La presión que significa la presencia de una continuada evaluación (que algunos confunden con evaluación continua!) puede hacer perder la confianza en buscar soluciones imaginativas o discutir los problemas o plantear temas de debate.

• **Confianza derivada de la colaboración**

El trabajo en equipo da confianza a todos los integrantes del equipo ya que cada uno "confía" un poco en los demás durante la realización del trabajo.

Matemáticas y satisfacción

La "satisfacción" en matemáticas puede manifestarse a través de muchos mecanismos tanto personales como temáticos. Algunos tipos interesantes de situaciones satisfactorias son los siguientes:

• **Satisfacción proveniente de la cordialidad**

El trato cordial, estimulante, puede dar satisfacción emocional y por tanto asegurar un clima en el que sea más agradable trabajar.

• **Satisfacción proveniente del trabajo bien hecho**

Hacer un buen modelo de cartulina, tomar medidas suficientes, hacer un mapa a escala, ampliar un dibujo un 70% a la fotocopidora... hay muchas actividades que serán satisfactorias de hacer si dan lugar a un buen producto o resultado final. Problemas inacabables, modelos no encajables, etc., son motivo de insatisfacción.

• **Satisfacción proveniente de observar las consecuencias de lo que se ha hecho**

Acabar un trabajo y ver que sirve para los demás (ni que sea potencialmente) da la satisfacción de la utilidad.

• **Satisfacción proveniente del reconocimiento**

Finalizar una tarea y poderla enseñar da la doble satisfacción personal de haberlo hecho y de que guste a los demás. Se ha de reconocer siempre aquello que vale la pena.

• **Satisfacción derivada del propio entendimiento**

No es necesario decir que la autosatisfacción es el primer objetivo a lograr. Y en el caso de entender cosas este es un objetivo prioritario.



Matemáticas y amor

Las palabras amor, estimación, enamoramiento, felicidad, como descriptoras de un estado emocional característico, también pueden ir ligadas al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas, especialmente de la mano del entusiasmo. Algunas situaciones tipificables serían:

• Estimación ligada al propio conocimiento

Aquello que se conoce tiene posibilidades de ser amado. El profesorado ha de amar a la gente que tiene delante; estos al profesorado pero el propio conocimiento de la materia también ha de provocar estimación. Podemos escribir poemas, canciones, enmarcar un dibujo,...

• Estimación ligada a aspectos convivenciales

Educar bien es facilitar un viaje guiado que sea placentero y compartir. Compartir un viaje, una excursión, una visita,... romper los roles tradicionales del "yo enseño" y "tú aprendes", ver la gente fuera del contexto institucional puede asegurar un amor a aquello que se hace y con quien se hace. Podemos, por ejemplo, planificar un viaje de fin de curso matemáticamente (escoger itinerarios mínimos, optimizar precios, mirar mapas...) y entonces... ¡hacer el viaje.

• Estimación relacionada con agradecimiento

Al tratar a la gente con buen juicio y sensibilidad es posible obtener un sentimiento de amor en cierta medida asociado al agradecimiento. Sensibilidad para la salud, para la situación familiar, para los problemas personales... y sensibilidad para facilitar que progresen, que tengan éxitos, que se orienten...

• Estimación relacionada con la pasión

Apasionarse por las matemáticas es posible. Cuando se logra se da una profunda estimación. Se ha de estimular esto: que las horas no cuenten, que el interés sea máximo. Puede ser difícil, pero al menos el profesorado si que ha de exhibir su pasión, haciendo ver lo bien que se lo pasa haciendo lo que hace.

• Estimación relacionada con el recuerdo

Los estudiantes se convierten en gente mayor y entran en el mundo adulto de los que fueron sus profesores/as. Entonces pueden encontrar en los buenos recuerdos



incluso un amor por las matemáticas no manifestado antes. Asegurar este buen recuerdo es influir también en el futuro.

Una carta y tres sueños

Estimado profesorado de matemáticas: Hace tiempo que deseo dirigirles esta carta. He oído hablar mucho de ustedes y de lo que hacen. Tengo noticias respecto a los fascinantes y asombrosos avances de su querida matemática. He visto mil calculadoras liberadoras de los antiguos algoritmos manuales; he visto maravillosos programas de ordenador interactivos y visualizadores de sorprendentes relaciones; he visto magníficos libros de texto ilustrados a todo color; he visto como Fermat se ha quedado sin conjetura... ¡Qué saltos en el desarrollo de la disciplina! Todo esto es maravilloso y es una evidencia del progreso científico y técnico. Pero, querido profesorado de matemáticas me pregunto si su progreso científico y organizativo ha ido acompañado con su progreso humano, educativo, emocional y actitudinal...

¿Aman más las matemáticas los chicos y chicas hoy en día? ¿Se divierten más? ¿Las aprueban más fácilmente? ¿Tienen una actitud más positiva? ¿Las usan con naturalidad fuera de clase? ¿son más felices usándolas?... y el profesorado, ¿disfruta más haciendo clase? ¿recibe el reconocimiento que merece su labor? ¿selecciona críticamente lo que explica o lo que deja de explicar?... ¿y la sociedad? ¿valora justamente la formación matemática? ¿se hace eco de lo que avanza la matemática? ¿usa las herramientas que la escuela le da? ¿financia la calidad? Nosotros sembramos a largo plazo. Los campesinos lo hacen para labrar con la llegada del buen tiempo siguiente. Nosotros sembramos para siempre y del patrimonio que ponemos al alcance de todos no reclamamos ni admiración ni veneración de ningún tipo. Queremos que nuestros discípulos hagan suyo el amor por las matemáticas y que aprovechen para su vida la formación recibida. Y queremos que lo hagan sin mirar atrás. De la misma manera que con las letras y la gramática se dan instrumentos para hablar y escribir, para hacer poemas y cartas, querríamos con los números y la matemática dar instrumentos para calcular y representar, para pagar y cobrar, para votar y para leer, para entender y para arreglar... las matemáticas para la vida no son el recuerdo que guardarán de nosotros sino todo aquello que harán de ellas en su existencia como personas, como ciudadanos, como críticos, como demócratas, como padres, como peatones, como practicantes del bricolage, como ahorradores, como lectores, como pacientes,... Querriamos que nuestros discípulos de hoy fuesen también unos padres y madres que supiesen transmitir a sus hijos e hijas el



entusiasmo contagiado por nuestro magisterio. Con esta fé en nosotros mismos y en lo que hacemos, seguro que podremos mover montañas y transmitir lo que realmente queremos que no son teoremas viejos sino matemáticas vivas, que no son algoritmos sino formas de ver y entender el mundo... matemáticamente. Y recordando Martin Luther King Jr. yo también quiero decir que: "¡Hoy, he tenido un sueño!" He soñado que el alumnado de matemáticas de repente se entusiasmaba por ir a las clases y que cuando sonaba el timbre entonces decían contrariados: no ¿podríamos alargar un poco más la clase?... los he soñado haciendo geometría con las manos y estadísticas en la calle, leyendo un diario con pertinentes observaciones... los he soñado abrazados llorosos a sus maestros/as al acabar el curso y sacando provecho de todo lo aprendido para planificar un buen viaje... he soñado a los chicos y chicas divertidos, sorprendidos, curiosos, amorosos, satisfechos, inquisitivos, orgullosos, críticos, afables,... "¡Hoy, he tenido un sueño!"

He soñado que el profesorado de matemáticas se volvía menos riguroso y más tierno, que relativizaba las programaciones oficiales, que evaluaba teniendo en cuenta todas las dimensiones educativas y enterraba las viejas rutinas de selección, que tenía ganas locas de ir al aula y afuera para vivir las matemáticas, que buscaba más ejemplos que contraejemplos, que el profesorado salía a la calle orgulloso y era saludado con cordial aprecio por todos... he soñado un profesorado innovador, animado, entusiasmado, crítico, libre, reconocido, estimado, creativo, gratificado,..."¡Hoy, he tenido un sueño!" He soñado que la sociedad prestaba más atención a la formación que al entretenimiento, que promovía más la educación viva que la cultura de museo, que daba las gracias a tantos profesores y profesoras que se lo merecen, que ayudaba y no delegaba la educación de los chicos y chicas,... y en esta sociedad he visto políticos más preocupados de la actuación en clase que de los decretos reguladores, políticos que inauguraban nuevas dotaciones de materiales y no edificios, que apoyaban iniciativas innovadoras y no derechos adquiridos, que luchaban contra el paro desde la formación y no el subsidio... he soñado una sociedad estimulante, comprensiva, agradecida, incentivadora, comprometida, justa, abierta, preparada,.....

Ya ven que he tenido muchos sueños. Si quieren pueden llamarlo también utopías. Nosotros hemos de "continuar trabajando apasionadamente y vigorosamente por hacer posible que los sueños sean realidades". Nuestros sueños de hoy son nuestros retos para mañana. También nosotros, profesorado de matemáticas, tenemos derecho a hablar de ideales, y de amor y de vida, y de futuro y de colores, y de



horizontes y de estrellas. Nosotros no somos únicamente los portavoces de axiomas indiscutibles y verdades racionales. Nosotros somos apasionados por las matemáticas y por compartir esta pasión con los demás. Nosotros creamos ilusión y estímulo, sorpresa y alegría desde la generosidad de nuestro decidido amor por el progreso y la formación de las personas. La matemática rigurosa se enseña con la mente, la matemática hermosa se enseña con el corazón. ¡Sean felices!

Claudi Alsina
Sec. Matemáticas. E.T.S.A.B.
Univ. Politécnica de Catalunya
Avda. Diagonal 649. 08028 Barcelona

En tiempos de peligro William Ospina

Tendemos a pensar que los grandes inventos de la humanidad son los de nuestra época; por eso está bien que alguien nos recuerde que las edades de los grandes inventos fueron aquellas en que inventamos el lenguaje, domesticamos el fuego y las semillas, convertimos en compañeros de aventura al caballo y al perro, la vaca y la oveja, inventamos el amor y la amistad, el hogar y la cocción de los alimentos, en que adivinamos o presentimos a los dioses y alzamos nuestros primeros templos, cuando descubrimos el consuelo y la felicidad del arte tallando gruesas venus de piedra, pintando bisontes y toros y nuestras propias manos en las entrañas de las grutas.

Los grandes inventos no son los artefactos, ni las cosas que nos hacen más eficaces, más veloces, más capaces de destrucción y de intimidación, de acumulación y de egoísmo. Los grandes inventos son los que nos hicieron humanos en el sentido más silvestre del término: el que utilizamos para decir que alguien es generoso, compasivo, cordial, capaz de inteligencia serena y de solidaridad. Todos advertimos que hay en el proceso de humanización, no como una conquista plena sino como una tendencia, la búsqueda de la lucidez, de la cordialidad, de la responsabilidad, de la gratitud, de la generosidad, de la celebración de los dones del mundo.



¿En qué consiste hoy la crisis histórica si no en el colapso al que parece llevarnos nuestra propia soberbia? Una doctrina del crecimiento económico que encumbra a unos países en el derroche, el saqueo de recursos y la producción de basuras, y abisma a los otros en la precariedad, mientras precipita crisis cada vez más absurdas sobre las propias naciones opulentas. Un modelo de producción y comercio que convierte el planeta en una vulgar bodega de recursos para la irracionalidad de la industria; cuyo frenesí de velocidad y de consumo altera los ciclos del clima, transforma el planeta en un organismo impredecible, crea un desequilibrio creciente del acceso a los recursos y al conocimiento, y convierte la sociedad en escenario del terror y la arbitrariedad, del tráfico de todo lo prohibido y de corrupción de todo lo permitido. Asistimos al fracaso de los valores históricos que fundamentaron toda moral y toda ética; y vemos desplomarse todo lo que fue respetable y sagrado.

Es inquietante saber que no es tanto la ignorancia sino el conocimiento lo que nos va volviendo tan peligrosos. Los arsenales que fabricó nuestra ciencia pueden hacer saltar este sueño en minutos. Nunca hubo tanto miedo como ahora, cuando estamos en manos de la razón. Y sin embargo no podemos intentar volver a la irracionalidad: una vez que encontramos la razón, encontramos un camino del que difícilmente podemos apartarnos.

Pero si hoy la cultura diseña el colapso, traza indolentemente bocetos de la aniquilación, la cultura tiene el deber de responder, desconfiar de la velocidad y de la opulencia como modelo de existencia, del desperdicio y el envilecimiento del entorno como manera de habitar en el mundo. Se diría que sólo podemos aprobar las innovaciones, las fuerzas transformadoras con la única condición de que no alteren lo que es esencial. Es preciso mantener inalterados los fundamentos de la vida y del mundo, y todos sabemos cuáles son, porque para eso nos han servido veinticinco siglos de conocimiento. El agua, el oxígeno, el equilibrio del clima, la salud de las selvas y de los mares: lo que nosotros no hicimos ni podemos hacer.

Entre el agua y la extracción codiciosa del oro de la tierra, yo prefiero el agua. Entre el aire puro y el arrasamiento de la selva por la economía del lucro, yo prefiero el aire. Entre el equilibrio del clima y el crecimiento industrial yo prefiero el clima. Entre la antigua virtud de las semillas y su modificación impredecible para la fabricación de organismos estériles favoreciendo la codicia de los que privatizan todo lo sagrado, yo no sólo prefiero las semillas, la prodigalidad de la naturaleza,



sino que considero un crimen la apropiación privada de los más antiguos bienes colectivos.

Toda transformación tiene que ser justificada. El universo es a la vez tan prodigioso y tan frágil, que no tenemos el derecho de modificarlo abusivamente, de alterar, por intereses privados, los bienes de todos. En lo fundamental ya no pertenecemos a una tribu, a una raza, a una nación, a un credo, pertenecemos a un planeta.

Para eso sirvió la edad de las transformaciones, para conocer los límites de la transformación. Para eso sirvió la globalización: para que se encontraran los intereses del todo con los intereses de cada parte, el sentido del globo con el sentido profundo de cada lugar. Ya cada individuo tiene el deber de ser la conciencia del planeta.

La batalla definitiva será por los glaciares y por los pelícanos, por los helechos y por las medusas, por selvas y océanos, por las artes y por los muchos sentidos de la belleza, por la razón y por el mito. La supervivencia del mundo exige una urgente redefinición de los límites del hombre y de su industria.

“Allí donde crece el peligro crece también la salvación”, dijo Hölderlin. Entonces estos tiempos son los mejores: porque llaman a la renovación de la historia. Y si es en la cultura donde surge el peligro, es allí donde tenemos que buscar la salvación. *(Leído en el aula máxima de la Universidad de Antioquia).

Actividad N° 7: Se realiza una presentación en diapositivas sobre la enseñanza e historia de la matemática, desde nuestros antepasados hasta la actualidad.

ENSEÑANZA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

URIEL GONZÁLEZ MONTOYA



“Muchos piensan que se puede aprender sin comprender y eso, contrariamente a lo que se cree, es mucho más difícil”.

Guy [Brousseau](#)



“La Matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser nunca una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces. La coyuntura matemática actual está clamando por una profunda revisión de modos y métodos de enseñar, que permitan ensanchar los campos de eficiencia matemática de nuestra juventud...”

Palabras pronunciadas por Pedro Puig Adam el día 27 de abril de 1957 con motivo de la XI REUNIÓN DE LA COMISIÓN INTERNACIONAL PARA EL ESTUDIO Y MEJORA DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

¿QUÉ HA PASADO 55 AÑOS DESPUÉS?

¿Cómo hacemos las clases?

Impartiendo la lección magistral, utilizando solo tiza y tablero.

Utilizando la regla y escuadra de tablero y mostramos a los estudiantes los cuerpos geométricos de madera.

¿Qué otra cosa hacemos?

Hacemos la clase afuera.

Usamos sus inquietudes para orientar los cursos,.

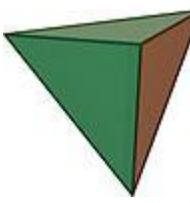
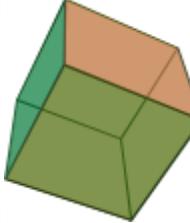
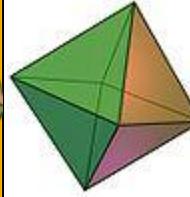
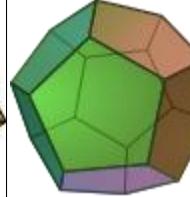
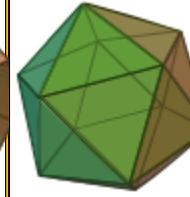
Nos arriesgamos a hacer matemáticas jóvenes.

Actividad N°8 Elementos sólidos en la matemática teniendo en cuenta los diferentes pensamiento matemáticos espacial, sistemas geométricos, métrico y sistemas de medidas en teoría y práctica.

Sólidos platónicos o poliedros regulares convexos

Los sólidos poliedros se conocían incluso antes de los griegos, existen pruebas de piedras talladas del neolítico que definen algunos de los poliedros. Proclo es el que atribuye a Euclides el trabajo de inscribir los poliedros regulares en una esfera. Se dice así mismo que el dodecaedro era el poliedro más admirado por la escuela pitagórica, según Empédocles



	<u>Tetraedro</u>	<u>Hexaedro, Cubo</u>	<u>Octaedro</u>	<u>Dodecaedro</u>	<u>Icosaedro</u>
					
Polígonos de las caras	Triángulos equiláteros	cuadrados	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares	Triángulos equiláteros
Número de caras	4	6	8	12	20
Significado nombre	Cada nombre está asociado a su significado en latín, en donde la primera parte del nombre designa un número tri= tres, hexa= seis, octa= ocho, dodeca= doce, ico= veinte y la segunda parte significa cara edro=cara.				
Número de vértices	4	8	6	20	12
Número de aristas	6	12	12	30	30
Ecuación de Euler	$C+V-A=2$	Expresa una cualidad topológica de los poliedros			
Asociados a los 5 elementos	fuego	Tierra	aire	Quinta esencia (Eter, universo)	agua
	En el timeo de Platón “..cuando dios se puso a ordenar el universo, primero dio forma y número al fuego, agua, tierra y aire... al tetraedro, por ser el de menor volumen, le emparejó con el fuego por aquello de la sequedad; al icosaedro, por ser el de volumen más grande, con el agua por aquello de la humedad; al cubo, por ser el que				



	se asienta más fácilmente, con la tierra; mientras que al Octaedro, por girar al sujetarlo por vértices opuestos, con el aire.				
Asociados a los planetas según Kepler	jupiter	Saturno	mercurio	marte	venus
	“...los sólidos regulares se dividen en dos grupos, tres en un y dos en otro. al grupo mayor, pertenecen primero el cubo, segundo la pirámide y finalmente el dodecaedro, al segundo grupo pertenecen, primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica porque, la parte más importante del universo, que es la tierra (donde la imagen de Dios se refleja en el hombre) separa a los dos grupos. Por consiguiente como después procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la tierra, mientras que los del segundo deben hallarse dentro...”				
cristalografía	Crsitales de sodio (sulfantimonio)	Sal común	Alumbre de cromo	pirita	
	La dureza y las propiedades magnéticas, aislantes o conductoras de un material están relacionadas con la estructura poliédrica de las moléculas que lo forman. En el análisis de las posibles estructuras poliédricas asociadas a los materiales, las propiedades algebraicas y geométricas pueden ayudar a entender algunas propiedades químicas o físicas de estos.				





Entre los siglos XVI y XVII, Kepler trabaja sobre el movimiento de los 5 planetas conocidos en ese momento Mercurio, Venus, Marte, Júpiter, y Saturno. Según él cada planeta se movía en una esfera separada del anterior por un sólido platónico. Avanzó hacia nuevos poliedros descubriendo poliedros estrellados.

Desde la antigüedad los poliedros han sido elementos recurrentes en la obra de muchos artistas y luego en la obra de muchos arquitectos, en la física y demás áreas del saber

AREAS DE POLIGONOS

Materiales: hoja cuadriculada grande, hoja de árbol, mapa, cuerda, regla o cinta métrica, papel y lápiz

Explorar el área, o mejor, determinar el área de terrenos, fue uno de los problemas iniciales a los que se vio abocado el hombre en los primeros días de la civilización y es precisamente de esta necesidad, de donde surge la rama de la matemática que nombramos como GEOMETRIA (Geo = tierra, Metria = medida ó medida de la tierra). Esta necesidad promovió el desarrollo de métodos, que poco a poco se fueron refinando y que cada vez permitieron, con mayor precisión, que expertos determinaran los tamaños de las extensiones de tierra, ya que dependiendo de esta y de la consiguiente capacidad de producción de trigo, arroz ó cebada, era el tributo que se debía entregar al rey, faraón o su equivalente al gobernante político de esos primeros tiempos.

Una finca, una chacra, una huerta o un lote de cultivo no posee, necesariamente, una forma que sea un polígono simple o un polígono regular, esto solo sucede en situaciones muy excepcionales, ahora por ejemplo, es muy común que los terrenos



o lotes que se ofrecen para la construcción de viviendas posean forma rectangular, lo que, como verás más adelante, facilita enormemente la determinación de su área.

El problema de medición que tenían los babilonios, sumerios, egipcios, griegos, muchos siglos antes de la denominada división de las fechas en (A.C. y D.C.), era el de determinar correctamente los valores de las áreas, los pensadores de esta época, que casi siempre oficiaban a su vez de sacerdotes, lograron encontrar una serie de procedimientos que les permitían alcanzar el objetivo.

Fue mediante procesos de exploración, de tanteo, de pulimiento de estrategias, con las que finalmente llegaron a construir unas tablas de valores, mediante las cuales podían calcular, no solo el área de los terrenos, sino que además, lograron a obtener las primeras “fórmulas” para la determinación del área y del perímetro de una gran parte de los polígonos con los que operamos en la actualidad.

Esta guía, guardando las proporciones, busca mostrar ese incipiente proceso de exploración desarrollado por aquellos primeros geómetras.

SITUACIÓN PROBLEMA: “DETERMINAR EL AREA EN UNIDADES CUADRADAS DE UN MAPA, BIEN SEA DEL MUNICIPIO, RESGUARDO, VEREDA, DEPARTAMENTO O PAÍS”

Pensamiento Matemático: PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS, PENSAMIENTO METRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS.

Ejes Temáticos: relaciones intra e interfigurales, relaciones métricas.

La situación de aprendizaje se compone de un momento en el cual, para resolver la situación, se va atravesando por una serie de actividades, que permiten, inicialmente, de forma aproximada, dar un valor para el área, además de adquirir los elementos conceptuales mediante los cuales será posible dar solución a otro tipo de problemas mucho más generales.

MOMENTO 1: PLANEACIÓN Y EXPLORACIÓN DE LAS POSIBLES SOLUCIONES



Antes de abordar cualquier tentativa de solución permita que los estudiantes discutan sobre las ideas que ellos tienen para abordar la solución del problema, realice las sugerencias que considere convenientes.

Una exploración inicial se puede desarrollar a partir de encontrarle el área a una hoja de un árbol. Dibuje el contorno de la hoja sobre una hoja cuadrículada.

¿Cómo encontrar el área?

¿Qué área tiene la hoja?

En cualquier situación que esté directamente relacionada con la medición, siempre debe existir algo con respecto a lo cual sea posible establecer una comparación, o que nos sirva para como unidad patrón de medida.

En el caso que nos ocupa el patrón de medida será un cuadrado de la hoja cuadrículada. Así que se debe contar el número de cuadrados encerrados por el mapa, observe que no todos los cuadrados están encerrados de forma total, esto implica hacer un proceso aproximado para completar cuadrados, el área resultante será entonces la suma de los cuadrados totales más los cuadrados que se completaron.

En este instante puede plantear una discusión con los estudiantes, si varios de ellos tomaron una misma hoja puede comprobar si los resultados son iguales.

Aproveche para mostrar que la precisión del método usado depende, en este caso, de la forma de la hoja. Discuta asuntos como el siguiente: si la unidad de medida se reduce a la mitad, ¿qué se puede obtener con respecto a la precisión del área determinada?

¿Qué se podría hacer para determinar la longitud del borde (perímetro) de la hoja?

Permita que exploren alternativas, es posible que entre todas ellas se pueda generar una discusión en la cual se evidencie que la hoja al tener lados curvos no facilita la medición.

Para resolver el problema se hace uso de un elemento adicional, se toma una cuerda y se bordea el contorno de la hoja, luego se extiende la cuerda sobre la hoja



cuadrículada, el lado de uno de los cuadrados de la cuadrícula será la unidad de longitud, así entonces, basta con contar cuantas unidades de longitud tiene la cuerda con la que se logró bordear la hoja.

Este método puede usarse ahora para hallar el área del mapa, una buena forma es dibujar el mapa sobre una hoja de papel cuadrículado, esto implica que el mapa con el que se va a trabajar debe ser pequeño para que permita el paso a dicha hoja, ya que de lo contrario se necesitaría un pantógrafo para hacer una reducción de escala.

Proceda de forma similar a lo realizado con la hoja del árbol.

Calcula el perímetro del mapa.

Por: Uriel González Montoya

Revisada 2018

Actividad N° 9: Se realiza un taller teórico práctico del sistema de medidas partiendo del cuerpo humano.

MATEMÁTICAS DEL CUERPO

“El hombre es la medida de todas las cosas”

Protágoras, siglo V a.C.

“Mide diez veces y corta el paño solo una”

Proverbio Etíope

La matemática innegablemente es un elemento de la cultura de todos los pueblos; después de los estudios etnográficos en los que se han documentado grupos culturales de todo el planeta, aun no se ha encontrado el primero de ellos, en donde la matemática no se haya manifestado en alguna forma. Y es que a veces por sutil que parezca en casi todas las actividades cotidianas estará presente esta increíble



construcción cultural. Lo digo en términos de construcción porque la matemática va “haciendo su aparición” en la medida en la que al interior de un pueblo y del entorno se van generando problemas que exigen soluciones, las cuales pasan en la mayoría de las veces por aspectos asociados a lo geométrico, lo numérico, y por procesos de medición.

Gran parte de las mediciones que usamos con nuestro cuerpo existen desde hace muchísimo tiempo, incluso hasta los pueblos “occidentales” las tenían entre su muy variado repertorio de medidas, es por eso que tal vez no tenga mucho sentido hacer un rastreo de cuál fue el primer pueblo en proponerlas, el hecho que si merece resaltar, es que eran las unidades con las que se generó en su momento un gran desarrollo, económico, político y social.

Los nombres dados a varias de las medidas fueron asignados a partir de los miembros del cuerpo, aun son de uso el pie, el paso, la pulgada, la braza, la vara, el codo, la cuarta, el dedo. La intención es que realicemos un recorrido por algunas medidas en el cuerpo humano, para que cada tener claridad sobre las dimensiones y equivalencias en un sistema internacional de medidas.

Supongamos por ejemplo que vamos tomar como patrón de medida la estatura de una persona.

Compara tu estatura con varios de tus compañeros

¿Cómo es con respecto a la de ellos, mayor, menor, igual?

¿Qué método usarías para determinar qué tan mayor o menor es?

Si lo que queremos es usar la estatura como unidad o patrón de medida, y sabiendo que existen personas más grandes o más pequeñas, ¿cómo determinar entonces la unidad patrón?

Sugerencia: determina 10 de las estaturas de tus compañeros y llena la tabla (en lo posible no usar aún la cinta métrica como instrumento de medida)

Estat ura 1	Estat ura 2	Estat ura 3	Estat ura 4	Estat ura 5	Estat ura 6	Estat ura 7	Estat ura 8	Estat ura 9	Estat ura 10	Suma de las estatur as/10



Usted decide realizar todas las mediciones con un grupo de 10 personas, pero entre ellas existen cuatro personas cuyas estaturas difieren significativamente de los seis restantes, sus estaturas son 1.25, 1.15, 0.9 y 0.95 veces la tuya respectivamente, en que difiere la tabla anterior. ¿qué sugieres que se puede hacer?

Ahora que ya se tiene un valor como referente, te sugerimos que continuemos con la exploración de las longitudes referidas al cuerpo, por ejemplo:

Mide la longitud de un paso (puedes usar la unidad patrón que hayas definido)

Revisa si siempre los pasos entre una misma persona son iguales, si entre personas diferentes son iguales, ¿existen pasos cortos y pasos largos?

¿Será que en la marcha los pasos tienden a unificarse?

¿Cómo harías para determinar entonces la longitud de un paso?

¿cómo lo harías tomar un valor promedio de un paso? Diseña una estrategia con tus compañeros que te permita determinar un valor para un paso.

Ahora que ya se tiene un valor definido se necesita calcular una distancia determinada en función del número de pasos ¿cómo se haría para llevar un registro del número de pasos y que éstos no se confundan? Discuta con sus compañeros la forma de hacerlo.

(por ejemplo se podrían usar los dedos de las manos para llevar un registro, ¿pero que pasaría una vez estos se acaben?)

De este tipo de mediciones tal vez la más famosa fue la que cuentan que hizo Eratóstenes cuando midió la distancia entre Siena y Alejandría (en Egipto) y partir de ello y otros cálculos (donde intervino el gnomon) logró deducir el tamaño y la forma del planeta tierra.

Existe una antigua regla que dice “la longitud del paso de una persona adulta es igual a la mitad de la distancia de los ojos a la planta del pie”³ verifiquemos si esta regla se cumple para cada caso.

Continuando en ese orden de ideas, una prueba más que tenemos a favor de las diferentes medidas que con el cuerpo humano se pueden realizar, y que fueron

³ PERELMAN Yacov, matemática recreativa



tradicionales en la antigüedad, son las que retoma el MAESTRO, pintor, arquitecto, ingeniero, inventor... Leonardo Da Vinci, de Vitrubio, el gran arquitecto romano del siglo I, y que pueden enunciarse como sigue:

“4 dedos hacen 1 palma, 4 palmas hacen 1 pie, 6 palmas hacen 1 codo, 4 codos hacen la altura del hombre. Y 2 codos hacen 1 paso, y que 24 palmas hacen un hombre, la longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura, desde el nacimiento del pelo hasta la punta de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre, desde la punta de la barbilla a la parte superior de la cabeza es un octavo de su estatura, desde la parte superior del pecho al extremo de su cabeza será un sexto de un hombre, desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo. Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte del hombre. La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte de un hombre. Desde el codo a la punta de la mano será la quinta parte del hombre; y desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte del hombre. La mano completa será la décima parte del hombre; el comienzo de los genitales marca la mitad del hombre. El pie es la séptima parte del hombre. Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte del hombre. Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta parte del hombre. La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma, y, como la oreja, una tercera parte del rostro»⁴

Estas medidas eran las que proponía Vitrubio para la construcción de las casas y edificios y que luego se retomó en la Europa renacentista especialmente en la obra de Leonardo Da Vinci. La propuesta es que verifiques las que te parezcan más llamativas o que se podrían usar más fácilmente para los procesos de medición.

¿En qué medidas se basa la construcción tradicional de nuestras casas?

Ahora, eres libre de usar la unidad patrón de medida que consideres más conveniente, pero como seguramente esa unidad tarde o temprano se prestará a confusiones y debates en torno a la longitudes entre las que son propias de una persona y de otra, fueron básicamente estos los motivos por los cuales a finales del siglo XVIII y como fruto de la revolución francesa se adoptó como unidad de medida

⁴ Consultada en internet http://www.portalplanetasedna.com.ar/divina_proporcion.htm, junio de 2009



el METRO⁵ simbolizado por la letra m (minúscula y que funciona para el singular y/o plural), el cual en consonancia con al consiga de la revolución francesa entorno a la igualdad, brindaba un único, definitivo e igual patrón de medida a toda la humanidad.

Existe otra regla citada por Yakov Perelman, en su libro matemática Recreativa, en la cual enuncia que una persona recorre en una hora tantos kilómetros como pasos da en tres segundos ¿qué elementos se deberían cumplir para que esta proposición sea cierta?

¿Existirá una diferencia muy significativa con la variación de la altura de la persona? Verifica para varios casos

Como puedes apreciar el metro no basta para determinar longitudes, existen algunas muy pequeñas y que escaparían a la medición que puedes realizar usando la cuerda de un metro de longitud, por eso se crearon subdivisiones en el metro, apareciendo los centímetros, los milímetros... pero no sólo fue necesario subdividir, también fue necesario amplificar la medida creándose los Decámetros, Hectómetros, Kilómetros... y así un sinnúmero de valores asociados al metro. (a modo de información puedes consultar la siguiente tabla)

Unidad patrón metro simbolizada por la letra m			
Múltiplos	Símbolo	Submúltiplos	
10^6 m = Megámetro	Mm	10^{-1} m = decímetro	dm
10^4 m = Miriámetro	Mam	10^{-2} m = centímetro	cm
10^3 m = Kilómetro	Km	10^{-3} m = milímetro	mm

⁵ El metro es la unidad de longitud del Sistema Internacional de Unidades. Se define como la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $1/299\,792\,458$ de segundo (unidad de tiempo) (aproximadamente 3,34 ns). Inicialmente fue creada por la Academia de Ciencias Francesa en 1791 y definida como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el polo de la línea del ecuador terrestre. Si este valor se expresara de manera análoga a como se define la milla náutica, se correspondería con la longitud de meridiano terrestre que forma un arco de $1/10$ de segundo de grado centesimal. Se realizaron mediciones cuidadosas al respecto que en 1889 se corporizaron en un metro patrón de platino e iridio depositado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (París). Tomado textualmente de <http://es.wikipedia.org/wiki/Metro>, consultada en junio de 2009



10^2 m = Hectómetro	Hm	10^{-6} m = micrómetro	μ m
10^1 m = Decámetro	Dm	10^{-9} m = nanómetro	nm

Es común que se diga que la vara (la distancia que va desde el dedo medio de la mano extendida hasta el hombro contrario tiene una longitud de 1m) mide y comprueba.

¿Cuántas cuartas tendrá? ¿Cuántas palmas? ¿Cuántos centímetros? ¿cuántos milímetros?.....Comprueba con las de otras personas

Que otros datos sería conveniente medir en la mano y en nuestro cuerpo para usar como referente en los procesos de medida, por ejemplo:

La distancia entre el extremo del dedo medio y el codo

La distancia entre los dedos índices y medio

La longitud del dedo índice, medido desde la base del pulgar hasta el extremo

La longitud de del dedo pulgar extendido

La longitud del dedo meñique

La longitud de las falanges del dedo pulgar (esta medida aún se usa y se conoce como pulgada)

Hay un valor muy recurrente en la matemática y con el cual trabajaron los matemáticos y los arquitectos que se puede revisar también en el cuerpo humano y que vendría a dar parte de la razón a Protágoras. Mida la estatura y luego la distancia entre el ombligo y el suelo, realice la división entre este par de valores. Ese número obtenido es el que se conoce como el número áureo o el número de oro.

Finalmente como reto adicional podrías, convertir todas las mediciones que realizaste en esta guía en términos de metros y sus subdivisiones y múltiplos.

Referencias bibliográficas

Colección matemáticas. El mundo de los niños. Vol 10. Word Book International. Chicago Usa 1994.

BISHOP Alan J. Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una Perspectiva Cultural. Editorial Paidós, Buenos Aires, 1999.

FIOL MORA María Luisa, FORTUNY AYMEMI Josep M.. Proporcionalidad Directa, La forma y el Número. Editorial Síntesis S.A. Madrid, España, 1990.



LIZCANO Emmanuel, *Imaginario Colectivo y Creación Matemática. La Construcción Social del Número, el Espacio y lo Imposible en China y Grecia.* Editorial Gedisa. Barcelona España, 1993.

Yakov Perelman *Matemática Recreativa.* Disponible digital en <http://yperelman.ifrance.com/> junio 2009

<http://www.geocities.com/stelaroj/astrofisica/eratos.htm>, consultada junio de 2009

<http://es.wikipedia.org/wiki/Erat%C3%B3stenes>, consultada junio de 2009

Elaborada por: Uriel González Montoya

C. 2009. Esta guía pertenece a Mathema Ltda.

Actividad N° 10: Taller teórico práctico de “Pentominó” donde se realizara un juego para explorar la geometría plana, área, perímetro, traslación, rotación y reflexión.

ESTE JUEGO busca desarrollar la capacidad mental para enfrentar y resolver ejercicios espaciales, así como brindar la oportunidad de explorar conceptos básicos de la geometría plana como: área, perímetro, congruencia de regiones, y algunas transformaciones, como traslación, rotación, y reflexión.

Comencemos entonces por definir algunos términos:

Poliominó: es el nombre dado a figuras planas formadas por arreglos de cuadrados que se ajustan lado con lado tal que las esquinas coincidan.

Los nombres dados a estos arreglos dependen del número de cuadrados, por ejemplo: monominó (1 cuadrado), dominó (2), triominó (3), tetraominó (4), Pentominó (5 cuadrados), hexominó (6) y así sucesivamente. Es decir que el Pentominó es un Poliominó de 5 cuadrados. La idea de Pentominó es bastante antigua aunque todavía no tuviera ese nombre. En un antiguo juego chino se ubicaban piedras cuadradas una al lado de otras dentro de un tablero, por lo que ya se tenía conciencia de que con 5 cuadrados se podían formar 12 figuras diferentes siguiendo la regla de compartir completamente al menos un lado. Sin embargo, el primer juego con Pentominós del que se tiene conocimiento fue escrito por el Ingles Henry Ernest udeny en 1907, para la revista Canterbury Puzzles. Durante la primera mitad del siglo XX algunos problemas relacionados fueron estudiados bajo el



nombre de problemas de disecciones. En 1953 el profesor Solomon W. Golomb en el club de Matemáticas de la Universidad de Harvard introdujo el término Pentominó y esbozó algunas de las posibilidades de este juego. A partir de este momento comenzó un estudio del juego el cual se publicó en American Mathematical Monthly. En 1957 Martin Gardner publicó en su columna en la revista Scientific American una recopilación del trabajo desarrollado hasta entonces dándolo a conocer al público en general. Desde esos días hasta hoy los pentominós siguen siendo una fuente de entretenimiento para muchas personas. Esperamos que te diviertas y que aprendas jugando.

Comencemos por identificar el número de posibles dominós: coge un cuadrado y ubica a su lado otro cuadrado: ¿Cuántas figuras diferentes pueden formarse? Ten cuidado esta es la misma figura solo que esta rotada. Si ahora añades un cuadrado al dominó que formaste ¿cuántos triominós se forman? ¡Cuidado! en este juego vamos a considerar que estos triominós son iguales. Es decir que no vamos a diferenciar piezas rotadas ni piezas simétricas de un Poliomínó ya formado

Antes de jugar con los Pentominós te proponemos una actividad que te ayudará a entender por qué este juego sólo tiene doce piezas.

Anexo Guía de Trabajo de los Pentominós elaborado por Mathema

Actividad. N° 11: Taller teórico práctico del sistema de numeración posicional. Un ejercicio de discusión⁶.

“El concepto de número no se reduce ni al proceso de conservación, ni a la actividad de cardinación, ni a la resolución de una determinada clase de problemas, ni a procedimientos algorítmicos, ni a la comprensión y manipulación de signos sobre el papel. Pero es de este conjunto de elementos diversos de donde emerge, con ayuda del entorno familiar y escolar, uno de los edificios cognitivos más impresionantes de la humanidad” Gerard Vergnaud (el niño y el número)

⁶ Tomado y adaptado de Mieke Kamii



En un comienzo las llantas de los carros eran de madera, queremos experimentar como rueda el volkswagen escarabajo con llantas de madera. ¿Cuántas llantas necesita el carro?

Ahora deseamos con las ruedas que tenemos determinar a cuantos carros se le podrían cambiar las llantas por las de madera.

Describe cómo lo podríamos hacer.....

Necesitamos encontrar una manera de registrar la información, de modo tal que si mañana viene otro niño sepa a cuantos carros se les va a cambiar las llantas.

Complementa la información usando dos números, uno para la cantidad de llantas y otra para la cantidad de carros.

Crees que el 8 tiene algo que ver con la cantidad de ruedas utilizadas. Muéstralo en el dibujo que ya hiciste.

Crees que el 2 tiene algo que ver con la cantidad de ruedas utilizadas. Muéstralo en el dibujo que ya hiciste.

¿Crees que el 28 tiene algo que ver con lo que has dibujado?

¿Crees que el 7 tiene algo que ver con lo que has dibujado?

Puntos para la reflexión.

¿Un número escrito hace uso a la vez de la ordinalidad y la cardinalidad?

¿Cuándo se totaliza una cantidad de objetos se utiliza una inclusión jerárquica?

¿Será lo mismo agrupar objetos y manejar grandes cantidades, que coordinar las cantidades agrupadas con el sistema de numeración?

Un sistema de numeración posicional ¿implica multiplicación?



Actividad N° 12: Taller teórico práctico de los números naturales mediante un juego llamado “Dix círculo numérico”.

En esta guía jugarás a hacer pequeñas sumas con los números naturales y en círculo numérico “pequeño”, vas a usar los números entre el 1 y el 10.

El juego lo vamos a llamar dix,

Elabora 36 tarjetas con los números entre el 1 y el 9.

Tú decides la cantidad de cada uno, aunque podría trabajarse con la misma cantidad.

Puedes jugar con uno o más compañeros.

Para iniciar el juego todas las tarjetas se ponen “boca abajo” y por turnos cada jugador va volteando una tarjeta a la vez. Cuando uno de los jugadores encuentre que la tarjeta que acaba de voltear, sumada con cualquiera de las ya volteadas le suma 10, toma para sí todas las tarjetas que se habían volteado.

De esta manera continua el juego, al final quien logre conseguir el mayor número de cartas.

Este mismo juego puede usarse para trabajar con restas sencillas, se juega de la misma manera pero esta vez cuando al restar dos de los valores de las cartas se obtenga siete, se tiene el derecho de tomar todas las cartas que están volteadas.

Para determinar el ganador también se puede decidir desde el que tiene el mayor número de tarjetas.

Otra opción para determinar el ganador es sumar todos los puntos de las tarjetas, quien posea el mayor valor gana el juego.

Una vez se ha puesto en práctica el juego el círculo numérico se puede hacer tan grande como se quiera. (Obviamente esto implicará aumentar el número de tarjetas).

Elaborado por: Uriel González Montoya

DIA (3)



Actividad N°13. Reflexión espiritual

Actividad N° 14: Se realiza un taller teórico práctico de las operaciones matemáticas y la escritura de números en la yupana.

Son muchas las culturas que construyeron objetos para representar o ejecutar operaciones matemáticas, tal vez los objetos de este tipo más conocidos sean los ábacos y entre ellos la Yupana, ábaco usado por los incas para realizar sus operaciones aritméticas.

Este tablero que manipularemos ha sufrido algunas modificaciones con respecto a las ilustraciones originales consignadas por los cronistas hacia los siglos XVI y XVII, pero se acomoda perfectamente la objetivo que buscamos.

Actividades

1. Observa y familiarízate con el tablero de cálculo de la yupana.

YUPANA



UNIDADES DE MILLON	CENTENAS DE MIL	DECENAS DE MIL	UNIDADES DE MIL	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES
○	○	○	○	○	○	○
○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○

Representar los números en este tablero es relativamente sencillo, basta con poner piedrecitas o semillas sobre cada uno de los agujeros del tablero.



CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

En la ilustración se puede ver representado el número 3

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

Representación del 12

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

Representación del 542

CENTENAS	DECENAS	UNIDADES

Representación del 809

Como se puede observar representar los números en la Yupana es supremamente fácil, ahora juega a representar números:

100, 754, 10, 35, 987, 153, 999, 555, 611, 432, 317

Escribe los nombres de los números representados anteriormente.

Elaborada por: Uriel González Montoya



Actividad N° 15. Rescatar los juegos tradicionales con fines pedagógicos y educativos para fortalecer los valores y tradiciones culturales.

Juegos tradicionales

“Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de juegos. El espíritu se encuentra ahí a sus anchas...”

Leibinz

¿A quién no le gusta jugar? Jugar, he ahí la clave. Todos los pueblos y culturas de nuestro planeta poseen juegos muy representativos en los cuales, en la mayoría de los casos se rescatan valores y tradiciones culturales, o se enseña sobre comportamientos que cada uno debería mantener presentes para una adecuada vida en comunidad; incluso algunos juegos desarrollan habilidades del tipo sensitivo y motor; estimulan la capacidad concentración y la memoria; desarrollan las competencias comunicativas y potencian el desarrollo del pensamiento en general.

Esos juegos, propios de cada cultura son los que se conocen como *juegos tradicionales*, los cuales poco a poco, se han ido perdiendo en los pueblos y comunidades debido a los procesos normales de inmersión cultural en los que las comunidades se encuentran y han venido a reemplazarse, en los pueblos y ciudades, por juegos electrónicos como los presentados en ataris, Nintendo y juegos de computador; esto no quiere decir que estos últimos no aporten o no desarrollen ninguna capacidad en los niños o en quienes los juegan, si no que cuando los niños se ven influenciados por ellos desde muy temprana edad, se pierden muchas posibilidades de que interactúen con juegos creativos que contribuyan a su formación desde otros aspectos; lo ideal sería que cuando lleguen a los juegos electrónicos tengan fortalezas motoras, sensitivas, sociales, éticas, comunicativas y de razonamiento bien desarrolladas, para que estos nuevos juegos realmente estimulen el desarrollo cognitivo e integral de los niños y jóvenes.

Para el desarrollo de juegos que potencien habilidades cognitivas, buscaremos juegos que no dependan ni de la fuerza física, ni de las mañas o trucos para resolverlos correctamente, buscaremos más bien el tipo de juegos que estimulan la creatividad, que se ciñen a unas reglas claras y bien definidas, las cuales, sin embargo, no agotan las posibilidades del juego; siendo más específicos aún, buscaremos juegos con contenidos matemáticos; es necesario recordar que tanto en



la matemática como en las ciencias naturales, el que las reglas o los enunciados de un juego sean simples, no implica que este sea necesariamente sencillo de resolver.

Para quienes vibramos con las matemáticas, pocas cosas se comparan con la satisfacción que se siente cuando después de estar ocupado por largo rato tratando de dar solución a un juego matemático esto se logra satisfactoriamente. Y es que esta ha sido por siempre una de las principales ocupaciones de los matemáticos de todos los tiempos; es así, como varios matemáticos destacados, jugando o explorando ideas que surgieron a partir de juegos, crearon valiosas teorías y nuevas ramas de la matemática; entre ellos cabría destacar a los siguientes:

- Pitágoras: números figurados y a partir de ellos sucesiones numéricas.
- Leonardo de Pisa (Fibonacci): sucesiones numéricas especialmente la que lleva su nombre, a partir de un juego sobre la reproducción de conejos.
- Gerolamo Cardano, Blaise Pascal y Pierre Fermat: los inicios de la probabilidad, a partir de los juegos de azar.
- Johan Bernoulli: aplicaciones del cálculo de variaciones, a partir de la solución dada por Leibniz, Newton, Huygens, Jakob Bernoulli del reto de la braquistocrona (el menor tiempo empleado para caer por una superficie).
- Leonard Euler: teoría de grafos y los inicios de la topología, a partir de resolver problemas de cruzar puentes.
- Hamilton: teoría de grafos (camino Hamiltoniano), a partir de su juego *Viaje por el mundo*, que se desarrolla sobre los vértices de un dodecaedro.
- David Hilbert: teoría de disecciones, a partir de jugar a realizar particiones sobre polígonos.
- Newman: teoría del desarrollo económico, a partir de análisis realizados sobre los juegos de estrategia.

Es importante estudiar y recordar los juegos propios, los juegos tradicionales de cada comunidad; rescatar los juegos que podrían apoyar cada área del pensamiento, hacer un proceso de reflexión sobre el juego con los estudiantes y jugarlo, pero no desaprovechar la oportunidad para que los estudiantes aprendan y enriquezcan su conocimiento, ya que siempre se puede correr el riesgo de caer en la simpleza de jugar por jugar; esto es importante, pero es mucho más significativo cuando el juego tiene una intencionalidad clara. Por eso la invitación es a que permitamos que los niños y jóvenes aprendan desde la manera más natural, desde lo que más nos gusta hacer a los humanos, desde el juego.



A continuación, se propone *el juego de la once*, un juego tradicional, con contenido matemático y que permite fortalecer el concepto de número, reparticiones, las operaciones aritméticas básicas; así como el desarrollo habilidades motoras y éticas, por cuanto se exige honestidad para el desarrollo del juego.

EL JUEGO DE LA ONCE

Este juego era común entre los niños del oriente antioqueño, quienes lo jugaban en las calles, cuando estas aún no habían sido asfaltadas; incluso, era uno de los juegos favoritos en los descansos en las escuelas. Entre los niños se armaban competencias en las que participaban “las barras” o “galladas” de cada cuadra o sector y que buscaban encontrar al mejor jugador de la zona.

Los implementos requeridos para este juego no eran más que canicas de cristal y un lugar (preferiblemente en tierra) en el cual se hacían 5 agujeros y una línea, por eso, era muy común el ver en las calles las correrías de niños observando el desarrollo de las partidas, cuando estas se hacían apostando las canicas, despertaban mucho más interés. Poco importaban los rayos del sol y los regaños de los padres, era más importante conocer el estilo de juego de quien iba ganando; observar como tiraba en “goterita”, si hacía o no “amarre” al tirar las canicas. Era todo un ritual el presenciar las buenas partidas del juego.

Como casi siempre se jugaba apostando las canicas, en muchas ocasiones sucedía que quien iba perdiendo buscaba la forma de realizar alguna treta para evadir las reglas y recuperar las canicas perdidas, cuando esto sucedía, eran los espectadores quienes tomaban partido en el juego, actuando como jueces y censuraban el comportamiento poco ético del jugador, si el jugador persistía en este comportamiento generalmente no era aceptado nuevamente en los juegos; no se perdonaba a quienes deseosos de tener canicas de cristal realizaban lo que se conocía como “manoteo”, que no era más que volarse con las canicas, sin permiso de los jugadores.

En la actualidad son pocos los niños que aún practican el juego, desafortunadamente como muchas cosas ha tendido a desaparecer, con los tiempos los roles y los intereses de los niños ya no son los mismos, pero lo que si se puede hacer es rescatarlo y darle otra visión, enseñarlo con fines pedagógicos y educativos.

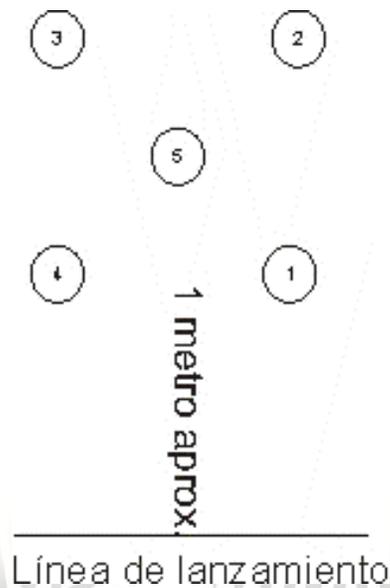


Descripción del juego

El objetivo del juego es que a partir de introducir canicas de cristal en cualquiera de los cinco agujeros construidos, se puedan acumular once puntos, quien primero lo haga es el vencedor.

Reglas del juego

- Sobre una superficie de tierra se hacen 5 agujeros, cuatro de ellos forman un cuadrado y el quinto va en la mitad.
- Más o menos a 1 metro de distancia de los agujeros se traza una línea, que será la línea de lanzamiento.
- Pueden jugar de dos a cuatro personas.
- Los jugadores deciden entre ellos con cuantas canicas de cristal jugaran (si los jugadores lo desean pueden apostar dichas canicas).
- Para iniciar la partida, se paran los jugadores detrás de los agujeros y de frente a la línea. Cada uno hace un lanzamiento de una canica hacia la línea, quien quede mas cerca de la línea será quien empieza el juego, el orden de los demás jugadores dependerá de su cercanía a la línea de tiro .
- A cada uno de los agujeros se les asigna un valor, como se muestra a continuación.





- En cada turno el jugador debe tener en su(s) mano(s) el total de canicas en juego y con todas desde la línea de lanzamientos, debe ejecutar los lanzamientos.
- En el primer lanzamiento se debe introducir al menos una canica en el agujero numerado como uno.
- Si esto no sucede y no introduce ninguna, cede el turno, si por el contrario, introduce canicas en cualquiera de los otros agujeros, pero no en el numerado como uno, “vuela”, pierde el juego.
- Después del primer lanzamiento y de haber introducido canicas en el agujero unidad, ya puede buscar la forma de completar los 11 puntos.
- Quien primero complete el puntaje es el vencedor.

El valor de once puntos no es una restricción, cualquiera de los jugadores puede decir otro valor al que desea llegar y la cantidad de canicas adicionales con las que desea jugar (o apostar). Esto se hará solo si la partida ya ha empezado y obviamente se debe contar con el acuerdo de los otros jugadores.

También se puede definir la cantidad de puntos y la cantidad de canicas a jugar al empezar el juego.

Ahora si ¡a jugar!.

Por: Uriel González Montoya.

Referencias bibliográficas

VAHOS JIMENEZ Oscar. ¡Juguemos! Cultura para la paz. Mayo de 1991. Litoarte Ltda.. Medellín Colombia.

De GUZMAN Miguel. Juegos Matemáticos en la Enseñanza. Publicado en Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Santa Cruz de Tenerife, 10 -14 septiembre 1984. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton.

PIERRE ALEM Jean. Juegos de ingenio y entretenimiento matemático. Editorial Gedisa, S. A. Barcelona España 1993.



Actividad N°16. Se hará una exposición de Diseñar la con el compañero Carlos A. Guegia H. uno de los creadores del libro de Matemáticas Nasa, donde nos dará a conocer la investigación realizada y su experiencia de trabajo e investigación.



Matemáticas en el Mundo Nasa

En el desarrollo del vivir nasa y su mundo matemático, la actividad de explicar es una herramienta básica que sirve para tejer conocimiento a través del compartir entre las personas, y con esto poder construir un mundo de sabiduría propia de la persona y del pueblo. Para nosotros adquirir y practicar el conocimiento es salvaguardarlo, por eso explicar es cultivar, compartir y transmitir conocimiento. Cuando nos damos cuenta de cosas o trabajos que son parecidos, queremos explicar por qué son parecidos, cuando queremos aprender a hacer cosas, necesitamos que nos enseñen, o para contar lo que nos pasó en el día, o que nos cuenten historias necesitamos hablar y escuchar bien, entender y que nos entiendan. Cuando no sabemos explicar bien, tenemos dificultades, porque no transmitimos bien el mensaje o la idea, esto trae serias repercusiones. La consecuencia que trae la mala explicación, es mal entendimiento. Creemos que por eso a los niños les va tan mal en la escuela. En matemáticas pasa lo mismo, siempre estamos buscando explicar las cosas, entender por qué suceden y contarles a los compañeros y compañeras lo mejor que se pueda, para que ellos también entiendan lo que creemos que es correcto. Por eso hemos investigado en nuestra cosmovisión y costumbres, cómo se hacen explicaciones, en el acto y en la palabra. El nasa en su cosmovisión tiene diferenciado el mundo en tres espacios, que son el mundo de arriba, el de acá y el de abajo. En el mundo de arriba está la Luna, el padre Sol, el cielo azul, los espíritus mayores, el trueno y las estrellas. En el mundo de acá estamos nosotros. Cuando digo nosotros estoy incluyendo todos los seres que habitamos en la superficie de la madre tierra, ya que en el corazón y pensamiento de los nasa todos tienen vida. Matemáticas en el mundo nasa.

DISEÑAR - Carlos A. Guegía H.

Es importante tener en cuenta la manera integral como los nasa se apropian de su territorio, porque esto implica siempre una relación armónica con el mundo físico y el mundo espiritual, que se manifiesta en el lenguaje, el pensamiento, los comportamientos y prácticas cotidianas y tradicionales como el diseñar.

Para los nasa, diseñar es la actividad de pensar en la posibilidad de hacer y construir teniendo en cuenta usos con finalidades tecnológicas, espirituales y de manejo territorial como: artesanías, casas, juguetes, caminos, puentes, cultivos, sitios



sagrados, calendario nasa; y materiales disponibles en la región como: cabuya, lana, piedra, palma de cera, iraca1, pindo y madera.



Suuphite nasa yattxi vxitna.
Participación de la comunidad en la construcción de viviendas en el resguardo de Chinas.

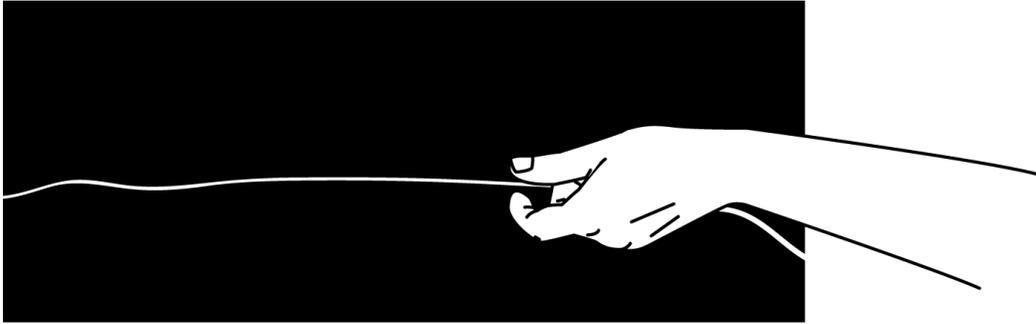
El diseñar depende de requerimientos básicos como son: el cálculo que se hace teniendo en cuenta el uso y la finalidad de lo que se crea; un proceso de socialización que permita retroalimentar e interiorizar de manera colectiva el uso, el mensaje y el procedimiento de la elaboración del diseño; los dones que se otorgan a la persona a través de la crianza y de la visita a los sitios sagrados.

- 1 Es una fibra vegetal extraída de la palma del mismo nombre.
- 2 Palma usada para hacer construcciones de casas y artesanías.

USOS Y MATERIALES

LA CABUYA.

Un diseño depende de las necesidades vistas y sentidas en una comunidad cualquiera, se construye con materiales disponibles del entorno natural. En el pueblo nasa por ejemplo, existe una gran cantidad de artesanías elaboradas en cabuya como: mochilas, lazos, trenzas, hamacas.



La cabuya es una fibra que se saca del fique por medio de un procedimiento manual, en el que se hace uso de un tronco grueso, en el que se cuelga la hoja de fique y comienza a despulpar la penca con el uso de una macana hecha en guadua, hasta que la fibra quede sin ningún residuo de pulpa, después se lava y se pone a secar. La calidad de las artesanías está manifiesta en la obtención de hebras finas y de color hueso. En la actualidad hay máquinas que facilitan la extracción del material pero no alcanzan a producir la misma calidad de la fibra.

Los bolsos hechos en cabuya tienen a su vez una clasificación que va de acuerdo a la función que se le vaya a dar, pues si son para uso en público son mucho más elaboradas, como sucede con los pûuz ya'ja que son jigras hechas especialmente para terciárselas en asambleas o fiestas y los puççu'ta que son utilizados para pisadores en las jáquimas³ de los caballos. En cambio, los diseños de objetos que se utilizan en la agricultura y la ganadería se caracterizan por ser un poco más rústicos.

Matemáticas en el mundo nasa. Un ojo es un rombo de la figura.

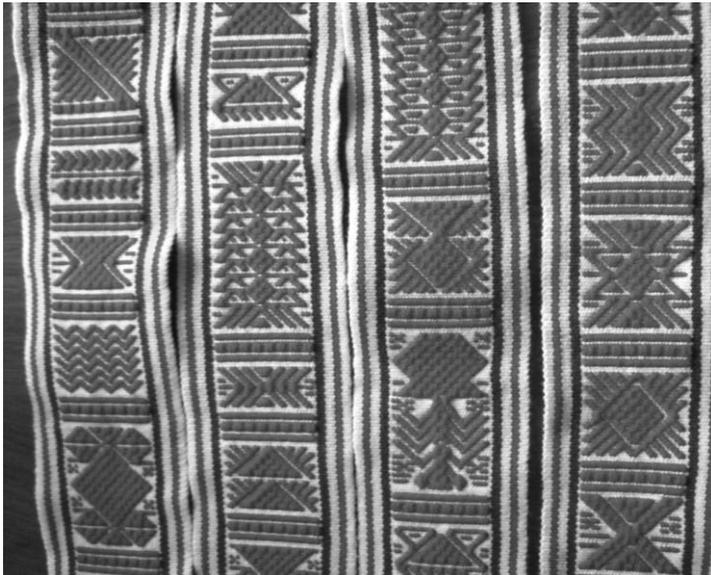
Además de los anteriores usos, la cabuya es utilizada como penca para hacer las chozas de los cerdos, a esta misma penca se le sacan hilos que se ponen a secar y una vez secos sirven para amarrar la madera en las construcciones. En el caso de la elaboración de las jigras, éstas son pensadas para soportar un peso de media o una arroba y hay señoras que tejen jigras con capacidad hasta de 5 arrobas de peso. Por lo tanto, los cálculos que hacen las artesanas exigen tener en cuenta el grosor de las hebras, el tamaño de los ojos⁵ dentro del tejido, la cantidad de material que se requiere, el tiempo que se necesita para su elaboración y los costos en caso que ésta sea vendida.



Los diseños de productos pensados para ser elaborados con la cabuya responden a las exigencias nutricionales de las familias, como es el caso de las redes para atrapar torcazas, las cuales eran usadas hasta hace algún tiempo en los resguardos de Tumbichucue y San Andrés de Pisimbalá. También se usaban para construir trampas, lazos, trenzas.

Además de cumplir una función estética, el diseño tiene funciones asociadas con la seguridad y la economía de las familias. Pues un objeto mal elaborado al romperse hace perder el tiempo y en el caso de los lazos utilizados en el manejo del ganado, puede hacer peligrar la vida de su portador. Por lo tanto, todo lo que se diseña tiene que responder a exigencias de calidad.

Las artesanías, como una tecnología desarrollada en las comunidades indígenas, son diseñadas para ser elaboradas con: agujas, telares, objetos giradores como el huso y los implementos para hacer lazos (klaapfxikha) o sencillamente a mano. Es tan importante el diseño de los objetos como el de las herramientas para su elaboración.



Taaw
Chumbe

LANA

Otro es el caso de las artesanías diseñadas para ser elaboradas con lana, ya que éstas, por el mismo material con que se construyen, son destinadas a dar solución a las necesidades de vestido y protección de las personas. Las artesanías más comunes hechas con este material son: ruanas, capisayos, chumbes, cuetanderas, entre otros.



Para la obtención de la lana, las artesanas tienen en cuenta el tiempo de verano y la posición de la luna para esquilarse los ovejeros. Seleccionan los vellones de acuerdo con las artesanías que se vayan a hacer. La lana se lava con agua caliente para quitar el olor y la grasa, se seca y luego se escarmela⁶, si es para hacer cobijas y alfombras se tiñe con colorantes artificiales, en el caso de las ruanas se tiñe con barro después de haberla elaborado y se hila. El hilado depende también del uso que se necesite. Para hilar la lana se emplea el huso y la puchicanga⁷. Como sucede con la elaboración y el uso de las jigras, se hacen ruanas para el trabajo cotidiano, con un hilado más fino. Para su elaboración se utiliza un telar hecho de palos que se clavan en el piso con unas muescas, el de arriba indica la altura y el de abajo sirve para hacer presión; se gira a medida que se hace el entramado, el cual se aprieta con una macana⁸. Este trabajo se aprovecha para que las niñas desde pequeñas aprendan esta práctica.

El tejido de jigras y ruanas acompaña todos los momentos de la vida de una persona, pero especialmente de la mujer nasa. Antes, se destinaba el tejido de jigras o cuetanderas para el tiempo de menstruación, gestación y dieta. Este era un momento bien importante, pues la mujer tenía un tiempo dedicado a pensar sobre su propia vida. En cambio el hombre no cuenta con ese espacio.

Socialmente, de acuerdo a la calidad de los tejidos, se decía si una mujer era o no trabajadora. Otro tejido donde se representa la cultura nasa es la cuetandera, que se divide en tres partes: base, cuerpo y terminación. En la base tiene un tejido de color blanco que llega hasta los triángulos que se encadenan formando un engranaje que representa el *tasx kiwe*, el mundo de abajo. En el cuerpo están los cuadros que antes representaban los colores del arco iris, juntos arman la figura del espiral hacia arriba y hacia abajo y simbolizan el *naa kiwe*, el mundo terrenal. Los cuadros forman también figuras de caminos en los que se plasma el recorrido de la vida y las dificultades o problemas que deben ser solucionados cuando se entrecruzan los caminos. En la base de la terminación, en la parte alta, se encuentra nuevamente los triángulos de colores y el tejido sencillo, este simboliza el *kwekwe kiwe*, el mundo de los espíritus creadores y los espíritus guías. Al final, la cuetandera se une con el cabestro en el que se tejen una serie de rombos que representan los ojos del ratón, símbolo de conocimiento y sabiduría.

Sobre los colores del arco iris se puede decir que se asociaban con atributos de la naturaleza y la historia nasa. El amarillo, el sol; naranja, verano; rojo, sangre; violeta, tristeza; azul, firmamento; verde, serpiente fue teadora¹⁰. En los ejemplos antes



mostrados se desarrolla la idea de forma y figura representada en: cuadros, triángulos, líneas quebradas y las espirales. Las cuales representan el tul, la casa, la tulpa, las montañas, los caminos y los procesos de desarrollo de las personas. Recibe este nombre por el fuerte golpe que le da a su víctima con la cola, dicen que las personas que son lastimadas por ella se vuelven muy veloces para andar.

Sin lugar a dudas, es el chumbe uno de los tejidos que mejor explica la correspondencia entre el diseño y la idea del manejo territorial, representada en ideogramas que encierran contenidos interpretados desde la cosmovisión, el territorio y la espiritualidad, como en la figura de la página 48. El re-conocimiento del territorio fue siempre una prioridad para la ubicación de las viviendas, el manejo y defensa de los recursos existentes. Por lo tanto, la construcción y el mantenimiento del dxi'j wala, el camino principal, era una necesidad importante porque comunicaba con otras comunidades, las cuales a su vez tenían atajos que garantizaban la circulación de personas y mensajes que hacían posible la pervivencia de los pueblos. Es importante tener en cuenta que muchos de esos atajos eran secretos para los extraños. Sin embargo, en la actualidad se ha perdido este principio, pues la carretera sustituyó el camino principal y los cabildos han olvidado el resto de caminos.



Kwetahdya'ja's uwenxi pnasa.
Cuetandera. Resguardo de Cuetando.
Foto Natalia Caicedo. 2010

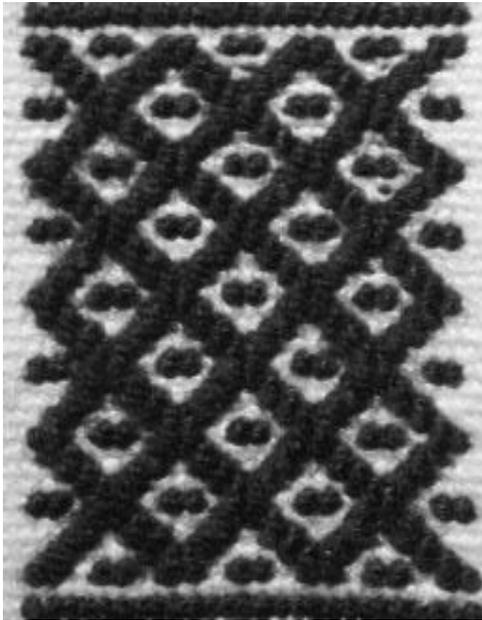


Por medio de ideogramas como el de la página 50, los antepasados pretendieron plasmar la necesidad de cultivar los valores que mantenían unidas las comunidades, pues un comportamiento adecuado de las personas en comunidad permite una convivencia pacífica y armónica entre las familias. La figura del pavo en la cultura nasa representa el orgullo, este defecto se ilustra en un cuento muy antiguo que dice que una muchacha muy creída, escogió tanto a su futuro esposo que terminó casándose con el Diablo, porque nadie satisfacía las exigencias que imponía a sus pretendientes.

La figura de esta página representa la cosmovisión del mundo nasa, para que la gente conozca los principios que rigen la vida en el naa kiwe, “mundo físico”; tales como el respeto a la vida espiritual y la práctica de la solidaridad. También se recuerda el cumplimiento de las normas de comportamiento para que puedan ir a descansar al vxite kiwe, mundo espiritual, o en su defecto ir de castigo al Nevado.

El ideograma muestra la idea de la redondez de la tierra. Desde la figura del hexágono se hace un acercamiento a la construcción geométrica de la circunferencia, visualizada en puntos equidistantes, que al ser unidos por líneas rectas logran representarla. En la siguiente figura se identifican claramente los hexágonos que aparecen en la anterior figura. También se puede apreciar que la convergencia de las líneas en el centro arma la figura de la tulpa¹¹ como centro de la actividad y del pensamiento nasa. En la casa, la tulpa es el espacio donde se ubica el fogón y las tres piedras que lo rodean.

En ambas imágenes se identifica una línea a modo de diámetro que separa el hexágono en dos hemisferos simétricos (arriba-abajo) y otras líneas diagonales en sentido derecha-izquierda. La simetría es un elemento importante de la actividad del diseño porque pone de manifiesto la manera como se interpreta la idea de la armonía y el equilibrio. Es así como se ve representada por medio de ejes, tanto en el cuerpo humano como en el territorio físico y espiritual. Lo anterior explica también la importancia de la práctica de la medicina tradicional, porque es a través de ella que se mantiene el equilibrio natural de todo lo que está en el territorio.



Taawte uza yafxa's uwenxi pnasa.
Chumbe que representa el ojo de ratón.
Kalus Wejxa. 2007

Retomando la figura inicial se puede destacar otro elemento que permite mostrar la manera como los nasa se apropian de su territorio, nos referimos a la representación continua de los rombos, imagen recurrente que es representada en otros chumbes con niveles de elaboración y detalle como el siguiente: Los rombos con puntos en el centro representan el ojo de ratón, animal que para defenderse y conseguir su alimento siempre está atento, es observador, ágil y creativo. En la cultura nasa, estas actitudes se necesitan para apropiarse del territorio y desde ahí construir conocimiento y sabiduría. En relación con el tema de manejo territorial es importante aclarar la relación entre el anterior chumbe (figura página 52) y el que aquí se muestra. En el primero se representa una percepción general del territorio físico y espiritual; en el segundo se muestra en detalle el territorio, las veredas, lugares sagrados, sitios históricos, lo que comprueba esa necesidad de despertar el sentido de pertenencia y de identidad.

El diseño no sólo se ha plasmado en las artesanías, también se manifiesta en dibujos, petroglifos, esculturas, viviendas y actualmente en el uso de maquetas. Durante toda su existencia, las comunidades hacen del diseño una experimentación a través de la cual crean, transforman y reproducen conocimientos para la permanencia en el territorio y la pervivencia con identidad.



Las viviendas nasa desde la antigüedad también se basan en un principio de simetría. Las dimensiones eran medidas mediante brazadas señaladas en hilos o varas. Los estantillos eran puestos con el uso de la plomada¹² para evitar que quedaran desnivelados, éstos en las esquinas eran reforzados con diagonales para evitar que se corrieran y hacer la estructura más estable, sobre los estantillos se colocaban los palos que sostienen las vigas y sobre ellas se colocaban los reyes¹³ buscando el centro para que la casa no se cayera. Lograr la estabilidad de las viviendas era muy importante, más teniendo en cuenta la sismicidad del territorio. Los diseños de las viviendas no se materializaban en planos o maquetas, se guardaban en la mente de los maestros constructores, quienes desde sus conocimientos se encargaban de pensar la manera como se construiría la casa, teniendo en cuenta las necesidades de la familia dueña de la misma.

Por lo tanto, el tamaño, la disposición interna, la orientación y la ubicación de la casa dependían de las necesidades de la familia y las recomendaciones de los médicos tradicionales, y la manera como se construyera dependía de los materiales existentes, la capacidad económica de la familia y la concepción cultural de quienes la iban a habitar. El plano 1 corresponde a las viviendas de Tierradentro antes de la tragedia de 1994, que fueron destruidas por las ondas sísmicas o por las avalanchas cerca de los ríos. Las más antiguas, sin importar el tamaño de la casa, tenían un modelo como el del plano 2.

Las que se hacen después de 1994 tienen los diseños adoptados por las entidades constructoras. Gracias a la transmisión de saberes, sabemos que la ubicación de las casas debía estar de frente al lugar por donde salía el sol, para que éstas estuvieran cargadas de su energía positiva en las mañanas. Era muy importante que los rayos del sol entraran por las ventanas de la casa, para que la mujer desde el interior pudiera manejar el tiempo y estar al día con los oficios que le correspondían, mientras que su esposo trabajaba en las huertas.

El grado de inclinación de los rayos del sol a derecha o izquierda dentro de la casa era muy importante, porque de acuerdo al recorrido del sol, las mujeres podían determinar el tiempo de verano o invierno, con sus respectivas épocas de siembra y cosecha. Por eso, el pueblo de Caldon, al norte del Cauca, hace el rito de recibimiento del sol el 21 de junio de cada año con regalos y fiestas. En este día, la orientación de los rayos del sol hace que se proyecten las sombras de las montañas a un punto determinado dando inicio a la época de verano.



Volviendo al diseño de las casas en épocas anteriores, éstas eran diseñadas para una infinidad de usos como: almacenamiento de alimentos, recinto de fiestas, lugar de reuniones, aposento de hospedajes y lugar de socialización de los niños, taller de artesanías, etc. Por lo tanto, la vivienda era un mundo en pequeña escala de lo que representaba la dinámica de la comunidad - Ipx ka't / Cocina Nxuhne / Sala

La vivienda representaba con su tulpa el origen de la vida, debido a que al pie suyo se enterraba el ombligo de los niños y a partir de ahí las personas comenzaban a crecer en tamaño, conocimientos y espiritualidad, para aumentar su campo de acción con parientes, allegados y la comunidad; hasta llegar a personas de otras comunidades, donde aumentaba su horizonte de conocimientos, y sin embargo después de su crecimiento la persona podía volver con facilidad a sus orígenes. (Encuentro matemáticas 2007. San Andrés de Pisimbalá).

La ubicación de una casa, además de la orientación con respecto al sol, se construía teniendo en cuenta las recomendaciones de los médicos tradicionales, pues no en cualquier parte se puede construir una casa, sino donde el médico sienta buenas señas en su cuerpo cuando pide permiso al dueño de la huerta¹⁴. Don Aurelio Volverás, del resguardo de San Andrés, nos comentó que si el lote es del gusto del dueño de la casa, se hace un segundo intento haciendo un ritual de refrescamiento del lote para que sea concedido el permiso, en caso contrario se debe cambiar la ubicación de la casa. Estas recomendaciones eran necesarias porque, además de la vivienda, se debía tener en cuenta el cultivo de las plantas medicinales.

Otro aspecto muy importante de las casas era el techo, el cual dependiendo del piso térmico en el que estuviera ubicada la vivienda, podía ser construida con madera disponible en ese lugar y ser tapado con paja, hoja de caña, tamo de trigo. Se caracterizaba por estar sostenida por unas enormes vigas, debido a que en el cielo raso de las casas se guardaba todo tipo de productos agrícolas o carnes. Allí se colgaban los alimentos y esa posición les permitía conservarse más.

En cuanto al enjaulado para echarles barro a las paredes, se realizaba con guadua, carrizo o chaglas, que se amarraban con bejuco blanco o corteza de mallorquín¹⁶, dependiendo del piso térmico en el que se construyera la casa. La altura de las paredes dependía del gusto del dueño. La parte interna de su corteza cuando está tierna sirve para amarrar la madera en la construcción de una casa. Las ventanas



eran unos orificios que difícilmente dejaban entrar la luz del sol. De tal manera que la cocina en especial permanecía aparentemente en penumbras. Don Marcelino Nes, capitán del resguardo, nos cuenta que era aparentemente, porque la persona, una vez adaptada a esa semioscuridad, podía ver todo lo que en su interior había, y esta situación era aprovechada por el dueño de la casa para salir si venía una visita desagradable. Como parte de la vivienda, para los hombres era necesario aprender a diseñar las cercas que rodeaban sus huertas, pues era un medio de protección de la familia, al asegurar la autonomía alimentaria. Como estos diseños estaban relacionados con la agricultura, era necesario conocer las épocas de siembra y las fases de la luna.

Hasta aquí hemos descrito algunos ejemplos de la actividad de diseñar, sería necesario ampliar este tema teniendo en cuenta la manera como se practicaba antes y ahora.

Texto tomado:

Guegia, Carlos. (2012). "Diseñar". En: *Nasa fxi'zenxite', isa wejxasa' na'tha'w atxaha'*. *Matemáticas en el mundo nasa*. Caicedo, Natalia y Parra, Aldo (edit.). Centro Indígena de Investigaciones Interculturales de Tierradentro (CIIT). Editorial el Fuego Azul. Bogotá. Pp: 39-62.





Bibliografía

- ◆ Poema de Manuel Quintin Lame
 - ◆ Himno Hijo del Cauca. (Rosa Helena Toconás)
 - ◆ Que es la matemática de Federico Mora Mora Escuela de Matemática, Universidad Nacional. fmora16@hotmail.com Hugo Barrantes Campos Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia. habarran@gmail.com www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes.
 - ◆ Barrantes, H. (2008a). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. En Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, número 4.
 - ◆ Barrantes, H. (2008b). Encuesta: creencias en la educación matemática. En Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, número 4.
 - ◆ Fotografía N° 1 Cutandera Nasa Diapositiva Mario Imitola
 - ◆ Fotografía N° 2: "Laguna Sat Tama. Asociación Nasa Cxhacxa.
 - ◆ Fotografía N° 3: "Laguna Sat Tama. Asociación Nasa Cxhacxa
 - ◆ Fotografía N°4 Nevado del Huila, pintura Benjamín Dindicue montaje fotográfico por: Mauricio Cuchimba.
 - ◆ Fotografía N° 5 de movilizaciones en el Departamento del Cauca Archivos Asociación Nasa Cxhacxa.
 - ◆ Fotografía N° 6 del consejo de Educación Nasa Chacha año 2012.
 - ◆ Fotografía N°7. Cuadro mochilas, chumbe.
- <https://notiindigena.wordpress.com/2013/05/09/colombia-arte-para-transmitir-armonia-y-resistencia/>
- ◆ Guegia, Carlos. (2012). "Diseñar". En: *Nasa fxi'zenxite', isa wejxasa' na'tha'w atxaha'*. Matemáticas en el mundo nasa. Caicedo, Natalia y Parra, Aldo (edit.). Centro Indígena de Investigaciones Interculturales de Tierradentro (CIIT). Editorial el Fuego Azul. Bogotá. Pp: 39-62.
 - ◆ Radford, L. (2006). "Elementos de una teoría cultural de la de la objetivación". En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México: RELIME (p.103-129)